

DIE CONSTRUCTIVE
ZEICHNUNGS-LEHRE.

ZWEITER THEIL.

THE UNIVERSITY OF

NEW YORK

LIBRARY

OF THE CITY OF NEW YORK

AND THE STATE OF NEW YORK

NEW YORK

1877

1877

1877

1877

1877

1877

DIE CONSTRUCTIVE
ZEICHNUNGS-LEHRE

ODER

DIE LEHRE VOM GRUND- UND AUFRISS,

DER

PARALLELPERSPECTIVE, DER MALERISCHEN PERSPECTIVE

UND DER

SCHATTEN-CONSTRUCTION.

FÜR

TECHNISCHE LEHRANSTALTEN UND FÜR DEN SELBSTUNTERRICHT

BEARBEITET

VON

DR. JOH. MÜLLER,

Professor zu Freiburg im Breisgau.

ZWEITER THEIL.

MIT EINEM ATLAS VON 37 KUPFERTAFELN.

ZWEITE AUFLAGE.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1874.

NEIGUNG UND LEHRE DIE CONSTRUCTIVE

ODER
DIE LEHRE VOM GRUND- UND AUFRISSE

DER
PERSPECTIVE DER MATHEMatischen PERSPECTIVE

UND DER
SCHATTEN-CONSTRUCTION

Die Herausgabe einer Uebersetzung in französischer und englischer Sprache,
sowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

DE JON. MITTLER

ZWEITER THEIL

ZWEITE AUFLAGE

BRUNNEN

DRUCK UND VERLAG VON BRUNNEN, KARLSRUHE UND BONN

1871

INHALT DES ZWEITEN THEILES.

Zweites Buch.

Schiefwinkelige Projection oder Parallel-Perspective.

	Seite
§. 1. Einleitung	1
§. 2. Schiefwinkelige Projection	2
§. 3. Zusammenhang der schiefwinkeligen Projection mit Grund- und Aufriss	—
§. 4. Langwürfel, Ecksäulen und Pyramiden	4
§. 5. Der Kreis	8
§. 6. Doppelt gekrümmte Rotationskörper	11
§. 7. Die Kreistangenten	14
§. 8. Vertikale Kreise, welche weder mit der Bildfläche parallel sind, noch auf ihr rechtwinkelig stehen	16
§. 9. Darstellung von Kreisen, welche weder in horizontaler noch in vertikaler Ebene liegen	19
§. 10. Durchdringung ebenflächiger Körper	21
§. 11. Durchdringung krummer Oberflächen	23
§. 12. Verkürzungsverhältnisse	24
§. 13. Axonometrische Projection	26
§. 14. Isometrische und anisometrische Projection	28

Drittes Buch.

Konische Projection oder malerische Perspective.

§. 15. Definitionen	31
§. 16. Das Bild paralleler Linien	32
§. 17. Augenpunkt und Distanzpunkt	33
§. 18. Linien, welche im Bilde gegen den Augenpunkt und gegen die Distanzpunkte convergiren	34
§. 19. Bestimmung eines Punktes im perspectivischen Bilde	35
§. 20. Technische Bemerkungen	37
§. 21. Flächen, welche mit der Bildfläche parallel sind	—
§. 22. Die Bilder vertikaler und mit der Bildfläche paralleler horizontaler Linien	38
§. 23. Horizontale Quadrate	39

	Seite
§. 24. Die Accidentalpunkte	40
§. 25. Perspectivische Fehler	42
§. 26. Kreise, welche mit der Bildfläche parallel sind	43
§. 27. Horizontale Kreise	44
§. 28. Vertikale Kreise, welche rechtwinkelig zur Bildfläche stehen	46
§. 29. Uebungsbeispiele	48

Viertes Buch.

S c h a t t e n l e h r e .

§. 30. Einleitung	53
§. 31. Construction der Schlagschatten	54
§. 32. Die Schatten horizontaler und vertikaler Linien auf horizontalen und vertikalen Ebenen	57
§. 33. Schatten auf schrägen Ebenen und gekrümmten Flächen	59
§. 34. Beispiele	60
§. 35. Schlagschatten solcher Körper, welche von doppelt gekrümmten Oberflächen begränzt sind	64
§. 36. Andere Methode, den Schlagschatten doppelt gekrümmter Oberflächen zu construiren	67
§. 37. Wendeschatten	69
§. 38. Helligkeit der Flächen	71
§. 39. Schlagschatten in perspectivischen Bildern	74

ZWEITES BUCH.

SCHIEFWINKELIGE PROJECTION .

ODER

PARALLEL-PERSPECTIVE.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHILOSOPHY DEPARTMENT
1100 EAST 58TH STREET
CHICAGO, ILLINOIS 60637
TEL: 773-936-5000

WINTER 1998

NUMBER 1

WINTER 1998

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHILOSOPHY DEPARTMENT

Einleitung. Durch Grund- und Aufriss ist ein Körper vollständig gegeben; obgleich **I** er aber durch die Combination derselben hinlänglich definirt ist, so geben Grund- und Aufriss eines Körpers dem weniger Geübten doch selten ein rasch übersichtliches Bild, wie es in vielen Fällen doch wünschenswerth ist.

Betrachten wir z. B. den Würfel $abcd, fghi$ Fig. 1, Tab. I. Im Aufriss erscheint er nur als **II. Tab. I** ein Quadrat. Aus den beigesetzten Buchstaben ersehen wir freilich, dass in a die Projectionen **Fig. 1.** zweier Punkte zusammenfallen, dass hinter dem Punkt a noch ein Punkt c liegt; wie weit aber c hinter a liegt, wie lang die Linie ac ist, ergibt sich erst aus dem Grundriss. Erst aus dem Grundriss ersieht man, dass die gerade Linie des Aufrisses, deren Endpunkte einerseits mit a und c , andererseits mit f und g bezeichnet sind, ein horizontal liegendes Quadrat darstellt, dessen wahre Gestalt nur im Grundriss erkennbar ist.

Ebenso erscheint das Quadrat $abfh$ im Grundriss zur Linie verkürzt und erst aus dem Aufriss vermag man seine wahre Gestalt zu erkennen.

Kurz weder der Grundriss für sich allein noch der Aufriss für sich allein giebt ein lebendiges Bild eines Körpers, von welchem man erst dadurch eine richtige Vorstellung gewinnen kann, dass man sie im Geiste combinirt und gleichsam eines durch das andere ergänzt.

Durch Wenden, wie es für den Langwürfel Fig. 49 auf Tab. XIII der 1. Abtheil. ausgeführt ist, kann man einen Körper freilich in eine für den Ueberblick geeignetere Stellung bringen, allein diese Operation ist für complicirtere Gegenstände äusserst mühsam und zeitraubend, und zudem führt das wiederholte Wenden und Uebertragen doch auch unvermeidlich Verluste an Genauigkeit nach sich. Endlich ist es bei dieser Darstellungsweise äusserst störend, dass die vertikalen Linien des Körpers in der Zeichnung nicht mehr vertikal erscheinen.

Das anschaulichste Bild würde freilich eine reine perspectivische Zeichnung geben, allein die Construction einer solchen ist einerseits ziemlich umständlich, andererseits aber entbehrt ein solches rein perspectivisches Bild den für die Praxis unschätzbaren Vorthail, die wahren Dimensionen des Gegenstandes mit Hülfe von Zirkel und Maassstab ohne Weiteres abgreifen zu können.

Den Vorthail möglicher Uebersichtlichkeit und leichter Ausführbarkeit verbunden mit der Möglichkeit, aus dem Bilde die wahren Dimensionen des Körpers entnehmen zu können, findet man bei einer Zeichnungsmethode vereinigt, welche wir als schiefwinkelige Pro-

jection bezeichnen wollen, welche man aber auch häufig als Cavalierperspective bezeichnet.

Die Grundsätze dieser Zeichnungsmethode sollen nun in den folgenden Paragraphen auseinandergesetzt und durch Beispiele erläutert werden.

- 2 **Schiefwinkelige Projection.** Grund- und Aufriss denkt man sich, wie auf Seite 9 auseinandergesetzt wurde, dadurch entstanden, dass von allen Punkten eines Körpers Perpendikel auf die Grundfläche und auf die Senkfläche gefällt werden. Grund- und Aufriss sind also das Resultat einer rechtwinkligen Projection.

Denken wir uns dagegen vor dem darzustellenden Körper eine vertikale Ebene aufgestellt, und in einer beliebigen schrägen Richtung gegen dieselbe ein System unter sich paralleler Projectionslinien durch alle Punkte des fraglichen Körpers gelegt, so wird jede dieser Linien die vertikale Ebene in einem bestimmten Punkte treffen, den wir als schiefwinkelige Projection des entsprechenden Körperpunktes bezeichnen wollen.

Die Gesamtheit der schiefwinkligen Projectionen aller Punkte einer Curve bilden die schiefwinkelige Projection derselben.

Die schiefwinkligen Projectionen aller Gränzkanten eines durch ebene Flächen eingeschlossenen Körpers bilden zusammen die schiefwinkelige Projection dieses Körpers.

Bei passender Wahl für die Stellung der Bildfläche und für die Richtung der Projectionslinien giebt die schiefwinkelige Projection sehr anschauliche Bilder, es kommt also nur noch darauf an, ein einfaches Verfahren zur Ausführung derselben zu ermitteln, um dieser Darstellungsweise eine hohe praktische Bedeutung zu sichern.

- 3 **Zusammenhang der schiefwinkligen Projection mit Grund- und Aufriss.** Um die Grundsätze der schiefwinkligen Projection zu entwickeln, wollen wir von der Darstellung des Würfels ausgehen, woran sich dann leicht die Regeln zur Darstellung anderer Körper anknüpfen lassen.

II. Tab. I
Fig. 1.

In Fig. 1 stellen die schwächer ausgezogenen Linien Grund- und Aufriss eines Würfels dar. Vor diesen Würfel denken wir uns eine vertikale Fläche aufgestellt, welche mit der Vorderfläche abh des Würfels parallel laufen soll und welche demnach im Grundriss zur Linie verkürzt erscheinen muss. Die Linie RS , Fig. 1, sei der Grundriss dieser zugleich mit der Senkfläche parallel laufenden vertikalen Ebene.

Durch jeden Eckpunkt des Würfels soll nun stets in gleicher Richtung eine schräg liegende Gerade gezogen und der Punkt ermittelt werden, in welchem sie die Bildfläche trifft.

Wir wollen im Folgenden stets annehmen, dass die schrägen Projectionslinien, von den Punkten des Gegenstandes aus nach vorn gegen die Bildfläche laufen und gleichzeitig nach der rechten Seite hin aufsteigen.

In Fig. 1 ist die Richtung und Lage der schrägen Projectionslinien durch Grund- und Aufriss vollständig gegeben. Die durch das Würfeck a gelegte Projectionslinie soll im Grundriss die Lage an , im Aufriss die Lage ax haben.

Im Grundriss schneidet die Projectionslinie an die zur Linie verkürzte Bildfläche RS im Punkte A . Man findet den Punkt A im Aufriss, wenn man durch A des Grundrisses eine Vertikale zieht und diese bis zur Durchschneidung mit ax im Aufriss verlängert.

Der so im Aufriss gefundene Punkt A bezeichnet die Stelle, in welcher die durch das

Würfeleck a gelegte schräge Projectionslinie die Bildfläche trifft. A ist die schiefwinkelige Projection des Würfecks a .

Ein zweiter Eckpunkt des Würfels ist f ; die schiefwinkelige Projection des Punktes f , welche durch F bezeichnet werden mag, kann ganz auf dieselbe Weise gefunden werden, wie A . Man ziehe zu diesem Zweck durch f im Aufriss eine Linie fy parallel mit ax , im Grundriss aber ziehe man durch f eine Linie parallel mit an .

Durch den Punkt F des Grundrisses, in welchem letztere Linie RS schneidet, wird nun ferner eine Senkrechte gelegt, deren Durchschnittspunkt mit fy im Aufriss wir gleichfalls mit F bezeichnen wollen. Dieser letztere Punkt F ist die schiefwinkelige Projection des Würfecks f .

In gleicher Weise lassen sich die schiefwinkeligen Projectionen B und H der Würfecken b und h bestimmen.

Das Quadrat $AFBH$ im Aufriss der Fig. 1 ist also die schiefwinkelige Projection der vorderen Würfel Fläche $afbh$. Es ist leicht zu übersehen, dass das Quadrat $AFBH$ dem Quadrat $afbh$ völlig gleich ist und sein muss.

Die hintere Fläche des Würfels, welche wie die vordere mit der Bildfläche parallel läuft, ist $cdig$; ihre schiefwinkelige Projection ist $CDGJ$ (der Punkt D ist in der Figur weggelassen worden), welche ganz auf dieselbe Weise gefunden wird, wie die schiefwinkelige Projection der vorderen Würfel Fläche. $CGDJ$ ist gleich $cdgi$, also auch gleich $abhf$.

Wir können diese Resultate verallgemeinern: Jede ebene Figur, welche mit der Bildfläche parallel läuft, erscheint in ihrer schiefwinkeligen Projection in unveränderter Gestalt.

Daraus folgt ferner, dass jede gerade Linie, welche der Bildfläche parallel läuft, in ihrer schiefwinkeligen Projection unverkürzt erscheinen muss, wie dies z. B. für die Linien BA , AF , FH , CG , GJ u. s. w. der Fall ist.

Gehen wir nun zur Betrachtung solcher Linien über, welche rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen, wie ac , fg , hi u. s. w.

Da A und C die schiefwinkeligen Projectionen der Würfecken a und c sind, so ist auch AC die schiefwinkelige Projection der Würfelkante ac .

Ebenso ist FG die schiefwinkelige Projection der Würfelkante fg , und HJ ist die schiefwinkelige Projection der Würfelkante hi .

Die Würfecken a und c fallen im Aufriss Fig. 1 in einen Punkt zusammen, weshalb denn auch die durch a und c gelegten schiefen Projectionslinien im Aufriss in eine einzige, ax , zusammenfallen, oder mit anderen Worten: die durch c gelegte schräge Projectionslinie wird im Aufriss von der durch a gelegten gedeckt. Daraus ergibt sich aber als nothwendige Folge, dass die schiefwinkeligen Projectionen der beiden Würfecken a und c im Aufriss auch auf der nämlichen schrägen Projectionslinie ax liegen müssen, dass die schiefwinkelige Projection AC der Würfelkante ac ein Stück der schrägen Projectionslinie ax sein muss.

Im schiefwinkeligen Projectionsbilde macht die Würfelkante AC einen Winkel mit der vorderen Würfelkante AF , welcher gleich ist dem Winkel, welchen im Aufriss die schräge Projectionslinie ax mit der Horizontalen af macht.

Die Wahl dieses Winkels ist willkürlich; wir wollen ihn, wie dies auch in Fig. 1 der Fall ist, im Folgenden stets gleich 30° annehmen.

Der Länge nach erscheint in unserer Figur AC kürzer als die wahre Länge der entsprechenden Würfelkante ac .

Die Länge von AC , FG u. s. w. hängt von der Richtung der schiefen Projectionslinien im Grundriss ab. Je kleiner man unter sonst gleichen Umständen den Winkel fan gewählt haben würde, desto grösser würde die Länge von AC ausgefallen sein.

In unserer Figur sind die Verhältnisse so gewählt, dass die schiefwinkeligen Projectionen AC , FG , HJ u. s. w. der Würfelkanten, welche rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen, halb so gross erscheinen, wie die unverkürzten Würfelkanten, und dies Verhältniss soll bei allen folgenden Zeichnungen beibehalten werden.

Aus den bisherigen Betrachtungen lassen sich nun folgende Regeln abstrahiren.

1) Jede senkrechte Linie des abzubildenden Gegenstandes erscheint im schiefwinkeligen Projectionsbilde ebenfalls als eine senkrechte Linie und zwar unverkürzt.

2) Jede horizontale Linie des Gegenstandes, welche mit der Bildfläche parallel läuft, erscheint auch im schiefwinkeligen Projectionsbilde als unverkürzte wagerechte Linie.

3) Jede horizontale Linie des Gegenstandes, welche rechtwinkelig auf der Bildfläche steht, erscheint im schiefwinkeligen Projectionsbilde als eine schrägliegende Linie, welche einen spitzen Winkel (gewöhnlich 30°) mit der Horizontalen macht; dabei erscheint sie in einem bestimmten Verhältniss verkürzt.

Nach diesen Regeln kann man das schiefwinkelige Projectionsbild jedes beliebigen Körpers entwerfen, ohne auf die in Fig. 1 in Anwendung gebrachte Constructionsweise zurückzugehen, welche überhaupt nur zur Begründung der eben ausgesprochenen Regeln dienen sollte.

- 4 **Langwürfel, Ecksäulen und Pyramiden.** Am leichtesten lässt sich unsere Zeichnungsmethode zur Darstellung von Langwürfeln, d. h. von Körpern anwenden, welche durch lauter Quadrate oder längliche Rechtecke begränzt sind. Nehmen wir zunächst an, dass eine Fläche des Langwürfels mit der Bildfläche parallel sei, wie dies für den Langwürfel der Fall ist, dessen Grund- und Aufriss Fig. 2 darstellt.

II. Tab. I
Fig. 2 u. 3.

Um das schiefwinkelige Projectionsbild dieses Langwürfels zu erhalten, wird die vordere Fläche $abcd$ desselben in ihren wahren, aus dem Aufriss Fig. 2 zu entnehmenden Dimensionen aufgetragen, wie dies Fig. 3 geschehen ist, wo sie mit $ABCD$ bezeichnet ist.

Um die Richtung der verkürzt erscheinenden Kanten zu finden, welche mit der Horizontalen einen Winkel von 30° machen sollen, kann man die Horizontale AB über B hinaus verlängern, auf der Verlängerung nach beliebigem Maassstab Bs gleich 2 (etwa 2 Centimeter) auftragen und dann in s ein Perpendikel errichten, auf welchem man die Länge st gleich 1 (etwa 1 Centimeter) abmisst. Eine von B nach t gezogene Gerade wird nun einen Winkel von 30° mit der Horizontalen machen.

Mit Bt parallel wird nun eine Linie durch A und eine durch D gezogen, und auf derselben $AF = BG = DJ$ halb so gross wie die Kante af des Grundrisses Fig. 2 abgemessen.

Zur Vollendung des schiefwinkeligen Projectionsbildes unseres Langwürfels hat man nur noch G mit J und F mit G zu verbinden.

Wollte man auch den hinteren Eckpunkt des Langwürfels mit den verdeckt erscheinenden Kanten in die Figur bringen, so hätte man nur von F eine Vertikale herunter, von J eine Horizontale nach der Linken und endlich von dem Durchschnittspunkt dieser Horizontalen und Vertikalen eine Linie nach C zu ziehen.

Fig. 6 stellt im Grund- und Aufriss einen quadratischen Klotz dar, auf welchem eine, II. Tab. I oben mit einer Pyramide endende quadratische Säule steht. Die vordere Fläche des quadratischen Klotzes und der quadratischen Säule soll mit der Bildfläche parallel stehen. Fig. 6 u. 7.

Das schiefwinkelige Projectionsbild des quadratischen Klotzes zu zeichnen, wie in Fig. 7, hat nach dem Obigen keine Schwierigkeit. Um sodann die Basis der auf der oberen Fläche des Klotzes stehenden Säule im schiefwinkeligen Projectionsbilde zu erhalten, verlängere man im Grundriss die Seite fg nach vorn bis n , die Seite df nach der Rechten bis m . In dem Bilde des unteren Klotzes mache man alsdann BN gleich bn und BM gleich $\frac{1}{2}bm$. Zieht man nun von M eine Horizontale, durch N aber eine Linie parallel mit BC , so ist der Durchschnittspunkt F dieser beiden Linien das schiefwinkelige Projectionsbild des vorderen Eckpunktes f der Säulenbasis.

Macht man ferner auf der durch M gezogenen Horizontalen FD gleich fd und auf der durch N gezogenen Schrägen FG gleich $\frac{1}{2}fg$, so sind FD und FG die sichtbaren Kanten der Basis der quadratischen Säule.

Durch D , F und G werden nun Senkrechte gezogen, und auf jeder derselben eine Länge abgemessen, welche gleich dh im Aufriss der Fig. 6 ist. Auf diese Weise werden die Punkte H , J und K des Bildes erhalten.

Zur Vollendung der Figur fehlt jetzt nur noch der Gipfelpunkt L der Pyramide; um ihn zu finden vollende man das durch die Kanten HJ und JK bestimmte Parallelogramm, ziehe die beiden Diagonalen dieses Parallelogramms und errichte im Durchschnittspunkte derselben ein Perpendikel, welches man ebenso hoch macht, wie der Punkt l im Aufriss der Fig. 6, über hi liegt, wie dies alles in Fig. 7 ausgeführt worden ist.

Fig. 4 stellt Grund- und Aufriss eines aus einem Würfel und zwei Langwürfeln gebildeten Kreuzes dar, welches so gestellt sein soll, dass die Längsrichtung des horizontalen Kreuzes rechtwinkelig zur Bildfläche steht. II. Tab. I Fig. 4 u. 5.

Um das schiefwinkelige Projectionsbild dieses Kreuzes zu erhalten, wie es Fig. 5 gegeben ist, kann man zuerst den oberen Würfel nach den oben gegebenen Regeln darstellen. Dann verlängert man die untere verkürzte Würfelkante DJ nach beiden Seiten und macht $DL = JM$ gleich der Hälfte von dl .

Durch L und M werden jetzt Horizontale gezogen, und LN gleich CD gemacht. Sodann werden durch N , L und M Vertikale gezogen, NQ , LO und MP gleich lo , Fig. 4, gemacht, und um den horizontalen Kreuzesarm zu vollenden QO und OP gezogen.

Um den unteren Theil des Kreuzes zu vollenden, verlängert man die vertikalen Würfelkanten AC , BD und GJ nach unten, macht RT gleich rt in Fig. 4 und zieht durch T eine Horizontale nach links, um den Punkt V , und eine Schräge parallel mit OP , um den Punkt U zu finden.

Es versteht sich von selbst, dass es nicht genügt, das Vorstehende unter steter Vergleichung mit den Figuren zu lesen. Um selbständig diese Darstellungsmethode gebrauchen zu lernen, ist es nothwendig, nach dem gegebenen Grund- und Aufriss das schiefwinkelige Pro-

jectionsbild in der angegebenen Weise selbst zu entwerfen und zwar in einem grösseren Maassstabe als auf unseren Tafeln.

Das zuletzt besprochene Beispiel zeigt recht deutlich den grossen Vortheil des schiefwinkligen Projectionsbildes. In Fig. 5 übersieht man mit einem Blick, dass man es hier mit einem Kreuze zu thun hat, während man dies aus Fig. 4 erst durch längeres Vergleichen des Grundrisses und des Aufrisses zu erkennen im Stande ist.

Gehen wir zu einem weiteren Beispiel über.

II. Tab. II

Fig. 8 u. 9.

Fig. 8 zeigt im Grund- und Aufriss einen rectangulären Klotz, auf welchem eine rectanguläre überragende Platte liegt. Um das schiefwinklige Projectionsbild dieses Objectes zu erhalten, dürfte wohl Folgendes der einfachste Weg sein:

Man construiren zunächst das Bild des rectangulären Klotzes gerade so als ob die Platte fehlte. Die obere Fläche desselben ist in Fig. 8 mit $abcd$, im schiefwinkligen Projectionsbilde Fig. 9 mit $ABCD$ bezeichnet. Die nach vorn verlängerte Kante cb des Grundrisses Fig. 8 trifft die Kante fg der unteren Fläche der aufgelegten Platte in n ; den entsprechenden Punkt N des schiefwinkligen Projectionsbildes findet man, indem man CB nach vorn verlängert und BN gleich $\frac{1}{2} bn$ macht.

Die Verlängerung der Kante ab im Grundriss Fig. 8 trifft die Kante hg in m . Das Bild M des Punktes m findet man in Fig. 9, wenn man AB nach der Rechten verlängert und BM gleich bm macht.

Zieht man durch N eine Horizontale, durch M eine Schräge parallel mit CB , so schneiden sich diese Linien in G , welcher Punkt das Bild von g ist. Nachdem man auf diese Weise einen Eckpunkt der aufgelegten Platte im schiefwinkligen Projectionsbilde gefunden hat, wird es leicht sein dasselbe zu vollenden.

II. Tab. II

Fig. 10 u. 11.

Zur Uebung construiren man das schiefwinklige Projectionsbild des in Fig. 10 sowie des in Fig. 11 im Grund- und Aufriss gegebenen Körpers.

II. Tab. II

Fig. 12 u. 13.

Bisher haben wir nur Langwürfel betrachtet, welche so gestellt waren, dass eine Fläche derselben mit der Bildfläche parallel lief. Nach den oben angegebenen allgemeinen Regeln unterliegt es aber keiner Schwierigkeit, auch das schiefwinklige Projectionsbild eines anders gestellten Langwürfels zu construiren, wie z. B. des in Fig. 12 durch Grund- und Aufriss gegebenen, wenn RS die Projection der Bildfläche im Grundriss ist, welche wir als an der Kante ab anliegend annehmen wollen. Das schiefwinklige Projectionsbild unseres Langwürfels ergibt sich in folgender Weise:

Nachdem in Fig. 13 eine vertikale Linie gezogen und auf derselben ein Stück AB gleich ab abgemessen worden ist, zieht man durch B eine Horizontale, auf welcher man BN gleich der Länge bn abmisst, um welche der Punkt c rechts von b liegt. Auf der durch N gezogenen Schrägen (welche einen Winkel von 30° mit der Horizontalen macht) wird sodann NC gleich $\frac{1}{2} nc$ abgemessen, um das Bild C des Eckes c zu erhalten.

Auf gleiche Weise wird das Bild F des Punktes f gefunden, wie dies in Fig. 13 ausgeführt worden ist.

Um das Bild der oberen Fläche $bcdf$ zu vollenden, hat man nur durch F eine Linie parallel mit BC und durch C eine Linie parallel mit BF zu ziehen. Der Durchschnittspunkt D dieser beiden Linien ist das Bild des hinteren Eckes d der oberen Fläche des besprochenen Langwürfels.

Durch F und C werden nun Senkrechte parallel mit BA gezogen, ihre Länge gleich

BA gemacht und endlich Linien durch ihre unteren Endpunkte und den Punkt A gelegt.

Nach diesen Notizen kann es keine Schwierigkeit mehr haben, das schiefwinkelige Projectionsbild irgend einer Ecksäule in beliebiger Stellung zu construiren, wie dies z. B. auf Tab. III für eine regelmässig sechsseitige Säule in den Hauptstellungen ausgeführt ist.

Fig. 14 zeigt Grund- und Aufriss einer vertikalen sechsseitigen Säule, welche so gestellt ist, dass die vordere Säulenfläche der Bildfläche parallel liegt. Nachdem man diese vordere Fläche in ihrer wahren Gestalt aufgetragen hat, verlängere man die obere Seite AB derselben und mache BN gleich bn ; ziehe alsdann, um das Bild des Punktes c zu finden, durch N eine Linie, welche einen Winkel von 30° mit der Horizontalen macht (wir wollen die so gezogenen Linien in der Folge kurzweg als Schräge bezeichnen), und messe auf derselben NC gleich $\frac{1}{2} nc$ ab. II. Tab. III Fig. 14 u. 15.

Auf gleiche Weise wird das Bild G des Punktes g gefunden.

Zieht man durch B eine Schräge und misst man auf derselben BD gleich $\frac{1}{2} bd$ ab, so ist D das schiefwinkelige Projectionsbild von d .

Auf gleiche Weise wie D wird auch der Punkt F gefunden.

Nachdem man das Bild $ABCDFG$ des oberen Sechsecks vollendet hat, zieht man durch jeden der Eckpunkte eine Vertikale, auf welcher man eine Länge abmisst, welche gleich ist der Länge gh (Aufriss Fig. 14) einer Säulenkante. Auf diese Weise erhält man die Eckpunkte des unteren Sechsecks, durch dessen Ausziehen die Figur vollendet wird.

Fig. 16 ist Grund- und Aufriss einer liegenden sechsseitigen Säule; die beiden sechsseitigen Endflächen sollen der Bildfläche parallel liegen, sie erscheinen also im schiefwinkeligen Projectionsbilde in ihrer wahren Gestalt. Man trage deshalb, um das schiefwinkelige Projectionsbild (welches wir im Folgenden kurzweg das Bild nennen wollen) dieser Säule zu erhalten, das vordere Sechseck unverändert auf, wie dies Fig. 17 geschehen ist, ziehe dann durch jeden Eckpunkt eine Schräge, auf welcher man eine Länge abmisst, welche gleich $\frac{1}{2} dh$ (im Grundriss der Fig. 16), wonach dann das Bild leicht vollendet werden kann. II. Tab. III Fig. 16 u. 17.

Betrachten wir endlich eine dritte Hauptlage der Säule, nämlich die, dass ihre Axe gleichfalls horizontal liegt, die beiden Sechsecke aber, welche die Säule zu beiden Seiten begränzen, rechtwinkelig zur Bildfläche sind, wie es bei der Fig. 18 in Grund- und Aufriss dargestellt Säule der Fall ist. II. Tab. III Fig. 18 u. 19.

Zunächst mache man die Horizontale AH , Fig. 19, gleich der vorderen Säulenkante ah (im Grundriss Fig. 18); ziehe dann durch A eine Schräge, auf welcher man eine Länge abmisst, welche gleich $\frac{1}{2} ad$ (im Grundriss Fig. 18), um den Punkt D des Bildes Fig. 19 zu erhalten. Ferner misst man auf derselben Schrägen die Längen AB' und AC' gleich $\frac{1}{2} ab$ und $\frac{1}{2} ac$ des Grundrisses Fig. 18, zieht durch B' und C' Senkrechte, auf welchen man $B'B = BG = C'C = C'F$ gleich ab im Aufriss der Fig. 18 abschneidet. Nachdem man so im Bilde die Eckpunkte A, B, C, D, F und G des Sechsecks erhalten hat, welches auf der rechten Seite die Säule begränzt, zieht man durch alle diese Eckpunkte Horizontale, welche man gleich AH macht, um die Eckpunkte des auf der linken Seite die Säule begränzenden Sechsecks zu finden.

Nach den bisherigen Auseinandersetzungen bedarf es wohl keiner Erklärung mehr, wie das Bild der abgestumpften quadratischen Pyramide Fig. 21 nach Grund- und Aufriss derselben Fig. 20 erhalten wurde. II. Tab. IV Fig. 20 u. 21.

Als Uebungsbeispiele mögen schliesslich die Objecte dienen, deren Grund- und Aufriss II. Tab. IV in Fig. 22 und Fig. 23 gegeben ist.
Fig. 22 u. 23.

5 **Der Kreis.** Wir wollen den Kreis der Reihe nach in drei Hauptstellungen betrachten, nämlich:

- 1) wenn er in einer horizontalen Ebene liegt,
- 2) wenn er in einer vertikalen Ebene liegt, welche rechtwinkelig zur Bildfläche steht, und
- 3) wenn er in einer vertikalen Ebene liegt, welche parallel mit der Bildfläche ist.

I. Beginnen wir mit der Construction des schiefwinkligen Projectionsbildes horizontaler Kreise.

II. Tab. IV Fig. 24. Fig. 24, Tab. IV zeigt Grund- und Aufriss eines horizontal liegenden Kreises, dessen (schiefwinkliges Projections-) Bild construirt werden soll. Zu diesem Zweck ziehe man zunächst im Grundriss den der Bildfläche parallel laufenden Durchmesser ab und theile von a ausgehend den Kreisumfang in 12 (oder eine andere durch 2 dividirbare Anzahl) gleicher Theile, wie dies Fig. 24 geschehen ist, wo die Theilpunkte der Reihe nach mit c, d, e u. s. w. bezeichnet sind. Verbindet man die Theilpunkte c und m, d und l, e und k, f und i, g und h , so stehen diese Verbindungslinien, welche den Durchmesser ab in den Punkten r, s, t, u und v schneiden, rechtwinkelig zur Bildfläche.

II. Tab. IV Fig. 25. Um das Bild dieses Kreises zu erhalten, wird vorerst der unverkürzt erscheinende Durchmesser ab in seiner wahren Länge aufgetragen, wie es in Fig. 25 geschehen, wo er mit AB bezeichnet ist. Auf dieser Linie AB werden nun die Punkte R, S, T, U und V bezeichnet, welche den Punkten r, s, t, u und v entsprechen, d. h. die Punkte, welche so liegen, dass $AR = ar, AS = as, AT = at$ u. s. w.

Da die Linien mc, ld, ke u. s. w. rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen, so müssen sie im Bilde Fig. 25 als schräge Linien erscheinen, welche mit der Horizontalen AB einen Winkel von 30° machen; man hat also durch die Punkte R, S, T u. s. w. Schräge in der angegebenen Richtung zu ziehen.

Auf der durch R gezogenen Schrägen muss sodann nach vorn und nach hinten eine Länge abgeschnitten werden, welche gleich ist $\frac{1}{2} rc = \frac{1}{2} rm$, um die Punkte C und M des Bildes zu finden.

Auf der durch S gezogenen Schrägen wird $SD = SL$ gleich $\frac{1}{2} sd$ gemacht, um die Punkte D und L des Bildes zu erhalten.

Ferner wird $TE = TK$ gleich $\frac{1}{2} te$ gemacht u. s. w.

Hat man auf diese Weise die Punkte $C, D, E, F, G, H, J, K, L$ und M im Bilde bestimmt, so hat man endlich dieselben durch eine Curve zu verbinden, welche das gesuchte schiefwinklige Projectionsbild des horizontalen Kreises ist.

II. Tab. V Fig. 26. Das eben angegebene Verfahren lässt sich sehr vereinfachen, indem es nicht nöthig ist, auf den besonders gezeichneten Grundriss des darzustellenden Kreises zurückzugehen. Nachdem man den Durchmesser AB aufgetragen hat, welcher im Bilde des horizontalen Kreises unverkürzt erscheint, beschreibe man über demselben einen Kreis, wie es Fig. 26 geschehen ist. Dieser Kreis, welcher dem unverkürzten Kreise gleich ist, dessen Bild man construiren will, theile man, wie dies ebenfalls in Fig. 26 geschehen ist, in 12 gleiche Theile, verbinde je zwei gleich weit von A abstehende Punkte, wie c und m, d und l, e und k u. s. w.

durch gerade Linien, welche den Durchmesser AB in den Punkten R, S, T, U und V schneiden, und ziehe dann in bekannter Weise Schräge durch R, S, T, U und V .

Es muss nun

$$RC = RM = \frac{1}{2} Rc$$

$$SD = SL = \frac{1}{2} Sd$$

$$TE = TK = \frac{1}{2} Te$$

$$UF = UJ = \frac{1}{2} Uf$$

$$VG = VH = \frac{1}{2} Vg$$

gemacht werden, was sehr leicht auf folgende Weise ausgeführt werden kann.

Man halbiere die Länge Te , schneide auf den durch T gezogenen Schrägen TE gleich $\frac{1}{2} Te$ ab und verbinde die Punkte E und e durch eine Gerade.

Mit dieser Linie eE werden nun durch die Punkte c, d, f, g, h, i, k, l und m Linien parallel gezogen, welche die durch R, S, T, U und V gelegten Schrägen in den Punkten C, D, F, G, H, J, K, L und M treffen, und dieses sind die gesuchten Punkte, über welche man die Ellipse zu ziehen hat, welche das schiefwinkelige Projectionsbild des horizontalen Kreises ist, denn es ist leicht zu beweisen, dass wenn $TE = \frac{1}{2} Te$ alsdann auch nach der eben ausgeführten Construction

$$RM = RC = \frac{1}{2} Rc$$

$$SL = SD = \frac{1}{2} Sd$$

$$TK = TE = \frac{1}{2} Te$$

$$UJ = UF = \frac{1}{2} Uf$$

$$VH = VG = \frac{1}{2} Vg$$

Das Ausziehen der Curve ist da am schwierigsten, wo sie am stärksten gekrümmt ist, also in der Nähe der Punkte A und B ; deshalb kann man nach der eben besprochenen Methode noch zwei weitere Punkte zwischen M und C einerseits, und zwischen G und H andererseits suchen, wie es in Fig. 26 wirklich ausgeführt ist.

Zur Uebung construire man das schiefwinkelige Projectionsbild eines horizontalen Kreises von 3 und eines solchen von 5 Zoll Durchmesser.

Nachdem man gelernt hat, das (schiefwinkelige Projections-) Bild eines horizontalen Kreises zu construiren, hat es keine Schwierigkeit mehr, das Bild eines vertikal stehenden Cylinders zu construiren, welcher oben und unten durch einen horizontalen Kreis begrenzt ist. Zunächst construirt man das Bild des oberen Kreises, wie dies Fig. 27 geschehen ist; alsdann zieht man durch beliebige Punkte der Umfassungsellipse Senkrechte, auf welchen allen die gleiche Länge, nemlich die Höhe des Cylinders abgemessen wird. Auf diese Weise erhält man die Punkte, über welche man die untere kreisförmige Kante des Cylinders ziehen kann.

Um die schiefwinkelige Projection eines abgestumpften Kegels zu erhalten, construire man erst den oberen, dann den unteren Begränzungskreis und lege dann eine gemeinsame Tangente an die beiden Ellipsen auf der rechten und eine solche auf der linken Seite, wie dies Fig. 30, Tab. VI ausgeführt ist.

Zu weiterer Uebung construire man

a) die schiefwinkelige Projection eines geraden, vertikalen Kegels von sechs Centimeter Durchmesser und drei Centimeter Höhe;

b) die schiefwinkelige Projection eines abgestumpften geraden Kegels, dessen oberer

II. Tab. VI
Fig. 30.

Kreis 15, dessen unterer Kreis aber 30 Millimeter Halbmesser hat, während der Mittelpunkt des oberen Kreises 3 Centimeter über dem des unteren liegt;

II. Tab. VI c) die schiefwinkelige Projection des Ringes, welcher in Fig. 31 im Grund- und Aufriss
Fig. 31. dargestellt ist.

d) die schiefwinkelige Projection des aus cylindrischen und konischen Flächen zusammen-
II. Tab. VI gesetzten Körpers, welcher Fig. 33 im Aufriss dargestellt ist.

Fig. 33. II. Wie die schiefwinkelige Projection eines vertikalen, auf der Bildfläche recht-

II. Tab. V winkelig stehenden Kreises ausgeführt wird, ist in Fig. 28, Tab. V erläutert.

Fig. 28. Zunächst wird der Kreis unverkürzt mit dem Zirkel gezogen. Nachdem man seinen horizontalen Durchmesser ke , und seinen vertikalen Durchmesser AB gezogen hat, wird der Umfang des Kreises in 12 gleiche Theile getheilt. Die durch die Theilpunkte des Kreises gezogenen Horizontalen schneiden die vertikale Axe AB in den Punkten m', l', i' und h' . Durch diese Punkte, sowie durch den Mittelpunkt k' werden nun Schräge gezogen und auf ihnen die Längen

$$m'M \text{ und } m'C = \frac{1}{2} m'm$$

$$l'L \text{ und } l'D = \frac{1}{2} l'l$$

$$k'K \text{ und } k'E = \frac{1}{2} k'k$$

$$i'J \text{ und } i'F = \frac{1}{2} i'i$$

$$h'H \text{ und } h'G = \frac{1}{2} h'h$$

abgemessen. Die über die so bestimmten Punkte $A, C, D, E, F, G, B, H, J, K, L$ und M gezogene Ellipse ist die gesuchte schiefwinkelige Projection des senkrecht auf der Bildfläche stehenden vertikalen Kreises.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich so leicht und unmittelbar aus den oben entwickelten allgemeinen Grundsätzen, dass keine weitere Besprechung nöthig ist.

Um die Punkte M, L, J, H, G, F, D und C zu erhalten, hat man jedoch nicht nöthig erst die Längen mm', ll', ii' und hh' zu halbiren; man kommt leichter zum Ziel, wenn man das bereits bei der Construction der Fig. 26 benutzte Verfahren in Anwendung bringt. Nachdem man nemlich $k'K = \frac{1}{2} k'k$ gemacht hat, zieht man nun durch die Punkte m, l, i, h, g, f, d und c Linien parallel mit kK , wie dies auch in Fig. 28 ausgeführt worden ist. Die gesuchten Punkte M, L, J, H u. s. w. sind da, wo die durch m, l, i, h u. s. w. parallel mit kK gezogenen Linien, die durch m', l', i', h' u. s. w. gezogenen Schrägen schneiden.

Kann man einmal die schiefwinkelige Projection eines vertikalen Kreises construiren, welcher rechtwinkelig zur Bildfläche steht, so ist es leicht, die schiefwinkelige Projection eines horizontalen Cylinders zu zeichnen, dessen Axe mit der Bildfläche parallel ist, weil ja dessen beide Gränzkreise rechtwinkelig zur Bildfläche stehen.

II. Tab. V Nachdem man die schiefwinkelige Projection des Gränzkreises construirt hat, Fig. 29, Tab. V,
Fig. 29. welcher auf der rechten Seite den Cylinder begränzt, zieht man durch beliebige Punkte a, b, c, d u. s. w. dieser Ellipse wagerechte Linien, sodann eine wagerechte Tangente an dem höchsten, und eine solche an dem tiefsten Punkt der Ellipse, und macht dann die horizontalen Linien aa', bb', cc' u. s. w. gleich der gegebenen Länge der Axe des Cylinders. Die durch die Punkte a', b', c', d' u. s. w. gezogene Ellipse ist das schiefwinkelige Projectionsbild des Kreises, welcher den Cylinder auf der linken Seite begränzt.

Nach diesen Erörterungen hat es wohl keine Schwierigkeit mehr die folgenden Aufgaben auszuführen.

Man construiren die schiefwinkelige Projection:

a) eines durch zwei concentrische Cylinderflächen gebildeten Ringes, welcher dem in Fig. 31 dargestellten gleich ist, dessen Axe aber horizontal und parallel mit der Bildfläche ist. Grund- und Aufriss dieses Ringes ist in Fig. 32, Tab. VI gegeben.

II. Tab. VI
Fig. 32.

b) eines aus cylindrischen und konischen Flächen zusammengesetzten Körpers, dessen Grund- und Aufriss in Fig. 34, Tab. VI gegeben ist.

II. Tab. VI
Fig. 34.

III. Am leichtesten ist die schiefwinkelige Projection derjenigen Kreise zu machen, welche mit der Bildfläche parallel sind, weil sie in diesem Falle unverkürzt erscheinen, also mit dem Zirkel gezogen werden können, wenn man die Lage ihres Mittelpunktes bestimmt hat und ihren Radius kennt.

Es sei z. B. die schiefwinkelige Projection des horizontalen Cylinders Fig. 35 auf Tab. VII zu construiren, dessen Axe cm rechtwinkelig auf der Bildfläche steht, so ziehe man zunächst um den Punkt c , Fig. 36, einen Kreis mit dem Radius ca , lege alsdann durch c die Schräge (mit der Horizontalen ungefähr einen Winkel von 30° machende) cx und messe auf derselben eine Länge ca ab gleich der Hälfte der Länge cm im Grundriss der Fig. 35, so ist a Fig. 36 der Mittelpunkt des hinteren Kreises, der gleichfalls mit einem Radius gezogen wird, welcher gleich ca der Fig. 35 ist.

II. Tab. VII
Fig. 35 u. 36.

Um die Zeichnung des Cylinders zu vollenden, wird parallel mit der Axe ca , Fig. 36, auf jeder Seite eine gemeinschaftliche Tangente an die beiden Kreise gelegt.

Zur Uebung construire man

a) das schiefwinkelige Projectionsbild des hohlen Cylinders, welcher in Fig. 37, Tab. VII im Grund- und Aufriss dargestellt ist, und

II. Tab. VII
Fig. 37.

b) das schiefwinkelige Projectionsbild der in Fig. 38 im Grund- und Aufriss dargestellten Hülse.

Fig. 38.

Die Axe des hohlen Cylinders Fig. 37 sowohl, als auch die der Hülse Fig. 38, steht rechtwinkelig auf der Bildfläche, folglich sind alle an diesen beiden Körpern vorkommenden Kreise mit der Bildfläche parallel.

Um die Darstellung von Kreisen in den drei in diesem Paragraphen besprochenen Lagen in Combination mit ebenflächig begränzten Körpern noch mehr einzuüben, construire man das schiefwinkelige Projectionsbild

a) des Körpers, welcher in Fig. 39, Tab. VII im Grund- und Aufriss dargestellt ist; es ist dies ein Würfel, und auf jeder Fläche desselben ist ein abgestumpfter Kegel aufgesetzt;

II. Tab. VIII
Fig. 39.

b) einer Halle, welche Fig. 40, Tab. VIII im Grund- und Aufriss dargestellt ist.

II. Tab. VIII
Fig. 40.

Doppelt gekrümmte Rotationskörper. Nachdem wir im vorigen Paragraphen gelernt hatten, das schiefwinkelige Projectionsbild eines Kreises für drei Hauptpositionen desselben zu entwerfen, wurde davon Anwendung gemacht zur Construction des Bildes von Kegeln und Cylindern, also von Körpern, welche wir als einfach gekrümmte Rotationsflächen bezeichnen wollen.

Den Cylinder und den Kegel kann man sich dadurch entstanden denken, dass eine gerade Linie um eine bestimmte feste Axe umgedreht wird. Beim Cylinder ist die erzeugende Gerade parallel mit der Umdrehungsaxe, bei dem Kegel macht die erzeugende Gerade einen Winkel mit der Umdrehungsaxe.

Wenn eine krumme Linie um eine feste Axe umgedreht wird, so entsteht eine doppelt gekrümmte Oberfläche. Es entsteht z. B. eine Kugel, wenn ein Kreis um einen

seiner Durchmesser umgedreht wird. Denkt man sich einen Kreis um eine ausser ihm liegende Axe umgedreht, so entsteht ein Ring von kreisförmigem Querschnitt u. s. w.

Um das schiefwinkelige Projectionsbild eines solchen doppelt gekrümmten Rotationskörpers zu construiren, lege man in entsprechenden Zwischenräumen Ebenen rechtwinkelig zur Umdrehungsaxe. Diese Ebenen werden den Rotationskörper sämmtlich in Kreisen schneiden, welche verschiedene Durchmesser haben. Von allen diesen Kreisen construiren man das schiefwinkelige Projectionsbild und lege um die so erhaltenen Ellipsen eine dieselben von Aussen gemeinschaftlich berührende Curve.

II. Tab. IX
Fig. 43.

Einige Beispiele mögen dies erläutern. Es sei Fig. 43 der Grundriss einer Kugel, deren Bild construirt werden soll. Bei der Kugel kann man jeden Durchmesser als Umdrehungsaxe betrachten; für unsere Construction ist es aber am bequemsten, den horizontalen Durchmesser ab als Umdrehungsaxe zu nehmen, welcher rechtwinkelig auf der Bildfläche steht.

Alle senkrecht zu der Axe ab gelegten Ebenen schneiden die Kugel in Kreisen, welche im Grundriss zur Linie verkürzt, im schiefwinkeligen Projectionsbilde aber unverkürzt erscheinen, weil sie ja sämmtlich der Bildfläche parallel sind.

Zur Construction des Kugelbildes genügen fünf solcher Kreise, welche wir durch die Punkte o, p, q, r und s , Fig. 43, legen wollen, welche den Halbkreis bqa in sechs gleiche Theile theilen.

Den hintersten dieser Kreise wollen wir mit 1, den zweiten mit 2 u. s. w., den vordersten aber mit 5 bezeichnen.

Es sind der Reihe nach d, f, c, h und k die Mittelpunkte der Kreise 1, 2, 3, 4 und 5.

II. Tab. IX
Fig. 44.

Das schiefwinkelige Projectionsbild der Kugel, Fig. 44, ist nun in folgender Weise erhalten worden. Zunächst wurde die Linie xy (die Schräge) gezogen, welche die Richtung angiebt, in welcher der Kugeldurchmesser ab im Bilde erscheint. Nachdem man den Mittelpunkt c auf xy bezeichnet hatte, wurde nun

ca der Fig. 44 gleich $\frac{1}{2} ca$ der Fig. 43

ck „ „ „ $\frac{1}{2} ck$ „ „

ch „ „ „ $\frac{1}{2} ch$ „ „

cf „ „ „ $\frac{1}{2} cf$ „ „

cd „ „ „ $\frac{1}{2} cd$ „ „

aufgetragen.

Ferner wurde um den Mittelpunkt

k der Fig. 44 ein Kreis mit dem Radius ks der Fig. 43

h „ „ „ „ „ „ „ hr „ „

c „ „ „ „ „ „ „ cq „ „

f „ „ „ „ „ „ „ fp „ „

d „ „ „ „ „ „ „ do „ „

gezogen, und so die Bilder der Kreise 1, 2, 3, 4 und 5 erhalten, von denen die hinteren verdeckten Theile in Fig. 44 nur punktirt sind.

Es ist endlich a , Fig. 44, der vorderste und b der hinterste Punkt der Kugel.

Um das Bild der Kugel zu vollenden, sind an den entsprechenden Stellen, nemlich bei A und bei B Curvenstücke gezogen, welche die Kreise 3 und 4, bei C und D aber solche, welche die Kreise 2 und 3 berühren.

Hat man einmal auf diese Weise die Gränzcurve der Kugel im schiefwinkeligen Projectionsbilde erhalten, so kann man alle ins Innere derselben fallenden Kreise und Kreisstücke auswischen.

Im schiefwinkeligen Projectionsbilde erscheint also die Kugel nicht von einem Kreise, sondern von einer Ellipse begränzt, welche bei unserer Constructionsweise freilich theilweise aus Kreisbogen gebildet ist.

Als zweites Beispiel mag der Ring dienen, welcher in Fig. 41 in Grund- und Aufriss II. Tab. VIII dargestellt ist. Fig. 41.

Die Axe des Ringes ist vertikal gestellt, alle senkrecht zur Axe geführten Schnitte schneiden also den Ring in horizontalen Kreisen.

Der Querschnitt des Ringes ist kreisförmig. Eine durch die Axe des Ringes parallel mit der Bildfläche gelegte Ebene schneidet ihn in zwei Kreisen, welche im Aufriss der Fig. 41 durch die Punkte $a, b, c \dots m$ und $a', b', c' \dots m'$ ¹⁾ in 12 gleiche Theile getheilt sind.

Durch diese Theilpunkte sind nun horizontale Ebenen gelegt, welche den Ring in einer Reihe horizontaler Kreise schneiden.

Die durch a und a' gelegte horizontale Ebene berührt den Ring in einem Kreise, den wir mit 1 bezeichnen wollen.

Die durch b gelegte horizontale Ebene schneidet den Ring in zwei Kreisen; der grössere derselben, den wir mit 2 bezeichnen wollen, hat die Länge mb' , der kleinere mit 3 bezeichnete hat die Länge bm' zum Durchmesser.

Eine horizontale Ebene, welche durch den Punkt c gelegt wird, schneidet den Ring in den Kreisen 4 und 5.

Die Kreise 6 und 7 sind die Durchschnitte des Ringes mit einer durch den Punkt d gelegten horizontalen Ebene u. s. w.

Von allen diesen Kreisen ist nun, und zwar für ihre in Fig. 41 verzeichnete gegenseitige II. Tab. VIII Lage, in Fig. 42 das schiefwinkelige Projectionsbild entworfen und dann die auf diese Weise Fig. 42. erhaltenen Ellipsen durch eine gemeinschaftliche Umfassungslinie verbunden worden.

Nach der ausführlicheren Besprechung dieser Aufgabe hat es wohl keine Schwierigkeit mehr, das schiefwinkelige Projectionsbild des Statifes zu construiren, von welchem in Fig. 45, II. Tab. IX Tab. IX der Aufriss gegeben ist. Man erhält nach unserem Verfahren das Bild Fig. 46, Fig. 45 u. 46. Tab. IX.

Hat man im schiefwinkeligen Projectionsbilde des Fusses einmal die Ellipsen 1, 2, 3 und 4 mit Bleistift gezogen, und an derselben die gemeinschaftliche Berührungscurve $abcd$ gelegt, so kann man alsdann die Ellipsen 1, 2, 3 und 4 selbst wieder auswischen.

Nach der an dem Ringe Fig. 41 und dem Statif Fig. 45 erläuterten Methode sind nun auch eine Menge architektonischer Formen, wie Rundstäbe, Hohlkehlen u. s. w. zu behandeln. Zur Einübung dieser Darstellungsweise mögen noch folgende Aufgaben dienen: Man construiren das schiefwinkelige Projectionsbild

- 1) des toscanischen Capitäls Fig. 48, Tab. X,
- 2) des dazu gehörigen Sockels Fig. 49, Tab. X,
- 3) der dorischen Säule Fig. 50, Tab. X.

II. Tab. X
Fig. 48, 49
u. 50.

Ein Grundriss ist zum Verständniss des Capitäls Fig. 50, sowie der Figuren 48 und 49

¹⁾ In Fig. 41 sollten alle Buchstaben des kleinen Kreises auf der rechten Seite commatisirt sein, es sollte also hier a', b', c' u. s. w. statt a, b, c u. s. w. stehen.

nicht weiter nöthig, wenn gesagt wird, dass die mit $abcd$ bezeichneten Stücke quadratische Platten sind. Alle übrigen Stücke sind rund, d. h. es sind Umdrehungskörper mit vertikaler Rotationsaxe.

- II. Tab. X Die Cannelirung der Säule Fig. 50 wird durch den Grundriss Fig. 51 verständlich.
 Fig. 51. Wie das schiefwinkelige Projectionsbild der Basis der cannelirten Säule zu construiren
 II. Tab. IX ist, wird durch Fig. 47 auf Tab. IX erläutert. Nach dem bisher Besprochenen dürfte dieselbe
 Fig. 47. dem denkenden Leser wohl ohne weitere Erklärung vollkommen verständlich sein.

In allen diesen Beispielen stand die Umdrehungsaxe des doppelt gekrümmten Rotationskörpers vertikal, die einzelnen zu construierenden Kreise lagen also horizontal. Nach denselben Grundsätzen sind aber auch solche Formen zu behandeln, wenn die Rotationsaxe eine andere Lage hat, wenn sie z. B. senkrecht auf der Bildfläche oder horizontal und parallel mit der Bildfläche steht.

Der denkende Leser bedarf wohl keiner weiteren Anleitung, um das schiefwinkelige Rotationsbild des Ringes Fig. 41, Tab. VIII für den Fall zu construiren, dass die Ringebene rechtwinkelig zur Bildfläche steht, dass er sich also in derselben Stellung befindet, wie der Ring Fig. 32, Tab. VI.

- Nach Ausführung dieser Aufgabe wird es auch keine Schwierigkeit mehr haben, das schiefwinkelige Projectionsbild des Rotationsapparates zu construiren, dessen Aufriss in
 II. Tab. XI Fig. 52, Tab. XI gegeben ist. Durch den Grundriss Fig. 53 wird ein Theil des Apparates er-
 Fig. 52 u. 53. läutert, dessen Einrichtung aus Fig. 52 nicht zu ersehen ist.

Das Statif des Apparates ist durch Fig. 52 vollkommen gegeben. Auf der Stahlspitze dieses Statifs ruht eine Messingplatte AB , an deren unteren Seite mittelst zweier Schrauben der Ring CD befestigt ist. Von diesem Ring ist im Grundriss Fig. 53 nur ein Stück gezeichnet.

Innerhalb des Ringes CD befindet sich die in Spitzen laufende Stahlaxe FG , welche im Aufriss durch den Ring CD verdeckt erscheint. Auf der Mitte dieser Axe ist eine mit einem starken Wulste HK begränzte Messingscheibe befestigt.

Diese Angaben werden genügen den Apparat verständlich zu machen, so weit es zur Ausführung seines schiefwinkeligen Projectionsbildes nöthig ist.

7 Die Kreistangenten. Jede Tangente eines Kreises erscheint im schiefwinkeligen Projectionsbilde als Tangente der ihn darstellenden Ellipse.

Die Seiten eines um einen gegebenen Kreis beschriebenen regulären Vielecks sind sämtlich Tangenten für denselben, und auch im schiefwinkeligen Projectionsbilde erscheinen sämtliche Vieleckseiten als Tangenten der dem Kreis entsprechenden Ellipse.

Dieser Umstand kann bei der Darstellung des Kreises im schiefwinkeligen Projectionsbilde sehr vortheilhaft benutzt werden.

Um jeden Kreis lässt sich ein Quadrat legen, dessen eine Seite der Bildfläche parallel ist. Von diesem Quadrat lässt sich leicht das schiefwinkelige Projectionsbild construiren, und in dieses schiefwinkelige Projectionsbild des Quadrates passt die Ellipse, welche den Kreis darstellt, in der Weise, dass der Mittelpunkt einer jeden Quadratseite auch ein Punkt der Ellipse und die Quadratseite selbst eine Tangente an dieselbe ist.

- II. Tab. XII Es sei z. B. Fig. 54, Tab. XII der Grundriss eines horizontalen Kreises, ab der
 Fig. 54. mit der Bildfläche parallele, cd der auf ihr rechtwinkelig stehende Durchmesser. Zieht man

durch die Punkte a und b Linien parallel mit cd , so sind dies Kreistangenten. Ebenso sind die Linien fg und hi , welche durch d und c parallel mit ab gezogen sind, Tangenten des Kreises; $fgih$ aber ist ein um den Kreis beschriebenes Quadrat.

Hat man das schiefwinkelige Projectionsbild der Linien ab und cd nach den bekannten Regeln construirt, wie es in Fig. 55 ausgeführt ist, so hat man auch hier nur durch die Punkte a und b parallel mit cd , durch c und d parallel mit ab zu ziehen, um das schiefwinkelige Projectionsbild des Quadrats $fghi$ zu erhalten. II. Tab. XII Fig. 55.

In dieses Quadrat ist nun die Ellipse in der Weise einzuzichnen, dass sie durch die Punkte a , c , b und d geht, und dass sie in a von der Linie hf , in c von hi , in b von ig und in d von fg berührt wird.

Nach demselben Verfahren ist in Fig. 56 das schiefwinkelige Projectionsbild desselben Kreises für den Fall construirt, dass derselbe vertikal und rechtwinkelig zur Bildfläche steht. Es ist hier ab der horizontale, rechtwinkelig zur Bildfläche stehende Durchmesser, cd ist der vertikale Durchmesser, welcher auch im Bilde unverkürzt erscheint. Einer weiteren Erklärung wird wohl Fig. 56 nicht bedürfen. II. Tab. XII Fig. 56.

Dieses Verfahren, das Bild der Kreise in das Bild der umschriebenen Quadrate einzuzichnen, ist namentlich bei kleineren Kreisen zu empfehlen.

Zur Uebung construire man nach der eben besprochenen Methode das schiefwinkelige Projectionsbild eines Kreises von 1 Centimeter und eines zweiten von $\frac{1}{2}$ Centimeter Radius, und zwar

- 1) für den Fall, dass die genannten Kreise horizontal liegen;
- 2) für den Fall, dass die Ebenen der Kreise vertikal und rechtwinkelig zur Bildfläche stehen.

Ferner construire man das schiefwinkelige Projectionsbild eines Würfels, der so gestellt ist, dass zwei seiner Flächen horizontal und zwei andere der Bildfläche parallel sind, und dessen Kantenlänge 8 Linien beträgt. Alsdann zeichne in jede der sichtbaren Flächen das schiefwinkelige Projectionsbild eines Kreises, welcher die vier Quadratseiten berührt.

Dieselbe Aufgabe führe man aus für einen Würfel, dessen Kantenlänge 4 Linien beträgt.

Wenn bei grösseren Kreisen das umschriebene Quadrat nicht ausreicht, um das Bild des Kreises mit Sicherheit zu ziehen, so kann man ganz in gleicher Weise das um den Kreis beschriebene reguläre Achteck in Anwendung bringen, dessen Construction sich sehr einfach aus der des Quadrats ergibt.

In Fig. 57 seien ab und cd die beiden rechtwinkelig zu einander stehenden Durchmesser eines grösseren Kreises, von denen der eine parallel der Bildfläche, der andere rechtwinkelig zu ihr sein soll. $fghi$ ist das umschriebene Quadrat, welches man erhält, wenn man durch d und c parallel mit ab durch a und b parallel mit cd zieht. II. Tab. XII Fig. 57.

Das um denselben Kreis beschriebene Achteck wird nun erhalten, wenn man jeden der beiden Durchmesser nach beiden Seiten hin verlängert, auf diesen Verlängerungen die Punkte k , n , l und o bestimmt, welche um die halbe Länge der Diagonalen des Quadrats $fghi$ vom Kreismittelpunkt m abstehen (also mk , mn , ml und mo gleich mg macht), und endlich die Linien ko , kn , lo und ln zieht.

Die Linien ko und ln sind parallel mit der Diagonalen hg des zuerst gezogenen Quadrats; kn und ol sind parallel mit der Diagonalen fi .

Jedes der beiden Quadrate $fgih$ und $oknl$ schneidet die Ecken des anderen ab, und dadurch eben entsteht das um den Kreis beschriebene reguläre Achteck, dessen Seiten in Fig. 57 ausgezogen sind, während die abgeschnittenen Ecken der beiden Quadrate nur punktiert sind.

Die Seiten des zweiten Quadrats $oknl$ berühren den Kreis in den Punkten p, s, q und r . Es sind dies die Punkte, in welchen die Seiten des zweiten Quadrats $oknl$ von den Diagonalen des ersten Quadrats geschnitten werden.

Um nun das schiefwinkelige Projectionsbild des Kreises zu erhalten, construirt man zunächst das schiefwinkelige Projectionsbild der beiden Quadrate, und zeichnet dann die Ellipse ein in das schiefwinkelige Projectionsbild des den beiden Quadraten gemeinschaftlichen regulären Achtecks.

II. Tab. XII
Fig. 58. Nehmen wir zunächst an, der Kreis Fig. 57 liege horizontal und der Durchmesser ab sei der Bildfläche parallel, so erscheint derselbe im schiefwinkeligen Projectionsbilde unverkürzt und als horizontale Linie, wie man Fig. 58 sieht. — Zunächst construirt man nun nach dem bekannten Verfahren das schiefwinkelige Projectionsbild des ersten Quadrats $hfgi$; alsdann verlängert man den unverkürzten Durchmesser ab nach beiden Seiten und macht mo und mn , Fig. 58, gleich den entsprechenden Längen in Fig. 57 und zieht durch o eine Linie parallel mit der Diagonalen fi und eine parallel mit der Diagonalen hg . Zieht man in gleicher Weise durch n Parallele mit den genannten Diagonalen, so erhält man das Bild des zweiten Quadrats $oknl$, dessen Seiten in den Punkten $psqr$ von der Diagonalen des ersten Quadrats geschnitten werden.

Durch die Punkte a, p, d, s, b, q, c und r ist nun endlich eine Ellipse in der Weise zu legen, dass sie die Seiten des den beiden Quadraten gemeinschaftlichen Achtecks in den genannten Punkten berührt.

Betrachten wir noch den Fall, dass die Ebene des zu zeichnenden Kreises vertikal und rechtwinkelig auf der Bildfläche steht, dass also der Durchmesser cd Fig. 57 vertikal und unverkürzt ist, ab aber, als rechtwinkelig auf der Bildfläche stehend, in der Weise verkürzt, wie Fig. 59 zeigt.

II. Tab. XII
Fig. 59. Nachdem man in Fig. 59 parallel mit ab und cd die Seiten des ersten Quadrats $fgih$ gezogen hat, wird der unverkürzte Durchmesser cd nach beiden Seiten verlängert, mk und ml in Fig. 59 gleich mk und ml in Fig. 57 gemacht, durch k und l werden Linien parallel mit den Diagonalen hg und fi gezogen u. s. w. Die Vollendung der Figur, also das Ziehen der Ellipse, geschieht nun ganz nach der bei Fig. 58 besprochenen Weise.

Das in diesem Paragraphen besprochene Verfahren, das schiefwinkelige Projectionsbild von Kreisen zu construiren, kann noch durch einige willkürlich gewählte Beispiele eingeübt werden.

8 Vertikale Kreise, welche weder mit der Bildfläche parallel sind, noch auf ihr rechtwinkelig stehen. Wir haben bisher das schiefwinkelige Projectionsbild nur für solche Kreise construirt, welche entweder

- 1) in einer horizontalen Ebene,
- 2) in einer mit der Bildfläche parallelen, oder
- 3) in einer vertikalen, auf der Bildfläche rechtwinkeligen Ebene lagen.

Wir wollen nun auch noch solche Kreise betrachten, welche irgend eine andere Lage haben.

Betrachten wir zunächst solche Kreise, deren Ebene zwar vertikal steht aber weder mit der Bildfläche zusammenfällt, noch zu ihr rechtwinkelig ist.

Um das schiefwinkelige Projectionsbild so gestellter Kreise zu construiren, kann man entweder 1) die im vorigen Paragraphen besprochene Methode des umschriebenen Quadrats oder des umschriebenen Achtecks anwenden, oder 2) nach den in §. 5 entwickelten Grundsätzen den Kreis in eine beliebige Anzahl (etwa 12) gleicher Theile theilen, die Lage dieser Punkte im Bilde bestimmen und über die so bestimmten Punkte die Ellipse ziehen.

Betrachten wir zuerst die Methode der Tangenten.

Zunächst stelle man das umschriebene Quadrat (also ein Quadrat, dessen Seiten dem Durchmesser des darzustellenden Kreises gleich sind), welches durch zwei vertikale und zwei horizontale Seiten gebildet wird, im Grund- und Aufriss für diejenige Stellung dar, bei welcher es der Bildfläche parallel steht, wie dies in Fig. 60 geschehen ist.

II. Tab. XII
Fig. 60.

Es ist hier $FGJH$ der unverkürzte Aufriss des umschriebenen Quadrats, cd der vertikale Durchmesser, m der Mittelpunkt des darzustellenden Kreises (welchen selbst in unverkürzter Lage auszuziehen unnöthig ist). Im Grundriss erscheint dieser Durchmesser dc zum Punkt und das Quadrat $FGJH$ zu einer mit der Grundlinie parallelen Linie verkürzt. Wenn nun die Ebene des darzustellenden Kreises einen Winkel α mit der Bildfläche machen soll, so ist zunächst der Grundriss des Quadrats $FHGJ$ um den Winkel α zu drehen, so dass er in die Lage hi kommt.

Ein im Grundriss von h auf die Horizontale gefällttes Perpendikel trifft dieselbe im Punkte H' , welcher leicht in Aufriss zu bringen ist. Im Aufriss aber liegt der Punkt h gerade hinter H' .

Handelt es sich aber darum, das schiefwinkelige Projectionsbild der Linie hi zu construiren, also zunächst den Punkt h im schiefwinkeligen Projectionsbild zu bestimmen, so hat man zu bedenken, dass h auf einer Linie liegt, welche durch H' gehend rechtwinkelig auf der Bildfläche steht. Man wird also durch den Punkt H' im Aufriss der Fig. 60¹⁾ eine Linie ziehen, welche einen Winkel von 30° mit der Horizontalen macht, und auf dieser die Länge $H'h$ abmessen, welche halb so gross ist als die Länge $H'h$ im Grundriss.

Hat man auf diese Weise den einen Eckpunkt des Quadrats, nämlich h im schiefwinkeligen Projectionsbild gefunden, so erhält man einen zweiten Eckpunkt i , wenn man von h über c eine gerade Linie zieht und ci gleich ch macht.

Durch die Punkte h und i werden sodann Senkrechte gezogen und auf diesen die Längen hf und ig gleich cd gemacht.

Hat man auf diese Weise das schiefwinkelige Projectionsbild $hfgi$ des ersten Quadrats construirt, welches zwei vertikale Seiten hat, so hat die Construction des zweiten Quadrats $koln$ (dessen Seiten mit den Diagonalen des ersten parallel laufen) im schiefwinkeligen Projectionsbilde nach den obigen Erörterungen keine Schwierigkeit. Hat man aber einmal das schiefwinkelige Projectionsbild der beiden Quadrate $fgih$ und $koln$, so bleibt nur noch übrig, die Ellipse in das beiden gemeinschaftliche Achteck einzuzeichnen.

Die zweite Methode, nach welcher eine entsprechende Anzahl von Punkten des Kreisumfanges im schiefwinkeligen Projectionsbilde bestimmt wird, über welche die Ellipse zu ziehen ist, wird durch Fig. 61 auf Tab. XIII erläutert.

II. Tab. XIII
Fig. 61.

¹⁾ Im Aufriss der Fig. 60 fehlt der Buchstaben H' ; er ist da zu setzen, wo die durch H' des Grundrisses gezogene Vertikale die Linie HJ des Aufrisses trifft.

Zunächst wird der Kreis als vertikal und der Bildfläche parallel im Grund- und Aufriss dargestellt, so also, dass er im Aufriss unverkürzt, im Grundriss aber zu einer horizontalen Linie verkürzt erscheint. Der Aufriss wird alsdann in 12 gleiche Theile getheilt und die Theilpunkte $A, B, C \dots M$ in Grundriss gebracht.

Alsdann wird der Grundriss um den Winkel α gedreht (gewendet), welchen die Ebene des darzustellenden Kreises mit der Bildfläche machen soll, wobei der zum Punkte verkürzte vertikale Durchmesser DK als Umdrehungsaxe dient.

Aus der Lage AG kommt dadurch der Grundriss des Kreises in die Lage ag^1); der Punkt A kommt nach a , B nach b , C nach c u. s. w.

Denkt man sich von den Punkten $a, b, c \dots m$ Perpendikel auf die vertikale Ebene gefällt, welche der Kreis vor seiner Wendung einnahm, also auf die im Grundriss zur Linie AG verkürzte Ebene, so treffen diese Perpendikel die Ebene in den Punkten $A', B', C' \dots M'$, welche im Grundriss leicht zu bestimmen und nach den bekannten Regeln in Aufriss zu bringen sind.

Auf diese Weise ergibt sich im Aufriss die Ellipse $A' B' C' \dots M'$, welche die Vertikalprojection des gewendeten Kreises ist.

Im Aufriss liegt der Punkt a hinter A' , b hinter B' , c hinter C' u. s. w. Ferner liegt e von E' , f von F' , g von G' u. s. w.

Von der Vertikalprojection $A' B' C' \dots M'$ des gewendeten Kreises ausgehend, ist es nun leicht, das schiefwinkelige Projectionsbild desselben zu entwerfen. Die Linien $A'a, B'b, C'c$ u. s. w., welche in der That rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen, erscheinen in der schiefwinkeligen Projection als Linien, welche einen bestimmten Winkel (in unseren Zeichnungen 30°) mit der Horizontalen machen. In dieser Richtung hat man also durch die Punkte $A', B', C' \dots M'$ in bekannter Weise die Schrägen zu ziehen und auf ihnen eine entsprechende Länge abzuschneiden.

Auf der durch A' gezogenen Schrägen wird die Länge $A'a$ abgeschnitten, welche halb so gross ist als das Perpendikel $A'a$ im Grundriss.

Ferner macht man

$B'b$ im Aufriss gleich $\frac{1}{2} B'b$ des Grundrisses

$C'c$ „ „ „ $\frac{1}{2} C'c$ „ „

u. s. w.

Ueber die auf diese Weise ermittelten Punkte $a, b, c \dots m$ wird dann eine Ellipse gezogen, welche das verlangte schiefwinkelige Projectionsbild des Kreises ist.

Die Punkte b, c, e u. s. w. lassen sich aber auch noch auf anderem Wege als durch Abmessung der Längen $B'b, C'c$ u. s. w. bestimmen.

Denken wir uns nemlich im schiefwinkeligen Projectionsbilde Fig. 61 die Sehnen ce, bf, mh und li gezogen, so ist klar, dass dieselben unter einander und mit dem Durchmesser ag parallel sein müssen. Daraus ergibt sich nun folgendes Verfahren, die Punkte b, c, e u. s. w. im schiefwinkeligen Projectionsbilde aufzufinden.

Nachdem man ganz nach der durch Fig. 61 erläuterten Methode die Punkte $A', B', C' \dots$

¹⁾ Im Grundriss der Fig. 61 ist a an die Stelle des Buchstabens n zu setzen. Ferner steht hier $B'N'$ nicht an der richtigen Stelle; diese Buchstaben sind weiter herunter und zwar an den Punkt zu setzen, in welchen ein von b auf AG gefälltes Perpendikel die letztere Linie trifft.

M' Fig. 62 bestimmt und durch sie die Schrägen gezogen hat, wird auch der Punkt *a* noch ganz nach der eben besprochenen Weise bestimmt. II. Tab. XIII
Fig. 62.

Eine von *a* über den Mittelpunkt *t* gezogene Grade muss nun die durch *G'* gezogene Schräge im Punkt *g* schneiden.

Zieht man nun ferner die Sehnen *C'E'*, *B'F'*, *M'H'* und *L'J'*, so schneiden diese den vertikalen Durchmesser *DK* in den Punkten *r*, *s*, *u* und *v*. Die Linie aber, welche man durch *r* parallel mit *ag* zieht, muss die durch *C'* und *E'* gezogenen Schrägen in den Punkten *c* und *e* schneiden.

Ebenso ergeben sich die Punkte *b* und *f* als Durchschnittspunkte der durch *B'* und *F'* gezogenen Schrägen mit der durch *s* mit *ag* parallel gezogenen Linie.

In dem eben abgehandelten Beispiel war der Kreis so gestellt, dass die rechte Seite des Kreises nach vorn, die linke nach hinten gewendet war. In Fig. 63 dagegen ist die eben besprochene Methode an einem vertikal stehenden Kreise durchgeführt, dessen linke Seite nach vorn und dessen rechte nach hinten gewendet ist. II. Tab. XIII
Fig. 63.

Zur Uebung ist nach den beiden eben erläuterten Methoden das schiefwinkelige Projectionsbild eines vertikal stehenden Kreises zu zeichnen, dessen Radius gleich 1 Zoll ist und dessen Ebene mit der Bildfläche (in der Richtung gezählt wie der Winkel α in Fig. 60) einen Winkel von 60° macht.

Ferner construiren man das schiefwinkelige Projectionsbild desselben Kreises für den Fall, dass seine Ebene vertikal steht, aber (in der erwähnten Richtung gezählt) einen Winkel von 120° mit der Bildfläche macht.

Endlich construiren man noch das schiefwinkelige Projectionsbild des Körpers, welchen Fig. 39, Tab. VII in Grund- und Aufriss darstellt, für den Fall, dass die vordere Würfel-*fläche* *fahb* einen Winkel von 30° mit der Bildfläche macht und zwar in doppeltem Maassstab der Fig. 39.

Um das schiefwinkelige Projectionsbild eines Kreises bei der in diesem Paragraphen besprochenen Stellung zu erhalten, ist immerhin eine ziemlich umständliche Construction nöthig. Wenn nun aber ein oder mehrere derartige Kreise an einem etwas complicirteren Körper vorkommen, so entsteht nicht allein leicht eine Verwirrung unter der Masse von Hülfslinien und Punkten, sondern es leidet auch die Reinheit der Zeichnung Noth.

Es ist deshalb besser, das schiefwinkelige Projectionsbild der Kreise auf einem besonderen Blatte zu construiren, im Hauptbild nur die Lage des Mittelpunktes und des vertikalen Durchmessers durch Construction zu ermitteln und, an diesen anlehnend, die vorher schon construirte Ellipse mittelst Durchzeichnung zu übertragen ¹⁾.

Dieses Verfahren ist bei der Ausführung der letzten Aufgabe zu empfehlen.

Darstellung von Kreisen, welche weder in horizontaler noch in vertikaler Ebene liegen. 9 Um das schiefwinkelige Projectionsbild eines Kreises von der im vorigen

¹⁾ Das Uebertragen mittelst Durchzeichnung wird in folgender Weise ausgeführt. Auf das Nebenblatt, auf welchem man das schiefwinkelige Projectionsbild des Kreises construirt hat, wird ein Stück Durchzeichnungspapier gelegt und dann die Ellipse sammt dem vertikalen Durchmesser mit Bleistift nachgefahren. Nachdem man so die Zeichnung der Ellipse auf dem Durchzeichnungspapier erhalten hat, wird dasselbe mit einem weichen Bleistift auf der Rückseite geschwärzt, und dann so auf das Hauptblatt aufgelegt, dass der vertikale Durchmesser der Ellipse auf dem Durchzeichnungspapier, den schon vorher construirten Durchmesser auf dem Hauptblatt deckt. Führt man nun abermals über die Ellipse auf dem Durchzeichnungspapier mit der Bleistiftspitze her, so erhält man auf dem Hauptblatt eine hinlänglich deutliche Spur der Curve, um sie dann mit Tusch ausziehen zu können.

Paragraphe besprochenen Stellung zu construiren, wurde zunächst die Vertikalprojection des Kreises oder des umschriebenen Achtecks auf die Bildfläche entworfen und von diesen ausgehend alsdann das schiefwinkelige Projectionsbild construirt.

Gerade ebenso hat man zu verfahren, wenn der darzustellende Kreis in einer Ebene liegt, welche weder vertikal noch horizontal ist.

Wie auch eine ebene Figur im Raum liegen mag, so kann man sie aus horizontaler Stellung in diese Lage dadurch bringen, dass man sie zuerst um eine horizontale Axe um den Winkel x , und dann um eine vertikale Axe um einen Winkel y dreht. Durch die Ausführung dieser beiden Wendungen kann man die Vertikalprojection der Figur erhalten, von der ausgehend dann das schiefwinkelige Projectionsbild derselben zu construiren ist.

Wir wollen diese allgemeinen Andeutungen über die hier zu verfolgenden Methoden durch ein specielles Beispiel erläutern.

Es soll das schiefwinkelige Projectionsbild eines Kreises von 2 Centimeter Radius construirt werden, dessen Ebene einen Winkel von 37° mit der Horizontalebene, und dessen horizontale Axe einen Winkel von 35° mit der Bildfläche macht.

Wir wollen diese Aufgabe zunächst mit Hülfe des umschriebenen Achtecks lösen.

II. Tab. XIII Nachdem man ein Quadrat, dessen Seiten gleich dem gegebenen Durchmesser des Krei-
Fig. 64. ses sind, unverkürzt im Grundriss Fig. 64 so gezeichnet hat, dass zwei Seiten desselben, nemlich AB und CD , mit der Grundlinie parallel sind, wird das zweite Quadrat $F'GHJ$ von gleicher Seitenlänge so aufgetragen, dass seine Seiten einen Winkel von 45° mit denen des ersten machen.

Beide Quadrate erscheinen im Aufriss zur horizontalen Linie verkürzt, auf welcher leicht die Lage der einzelnen Eckpunkte A, B, C, D, F, G, H und J bestimmt werden kann.

Der Aufriss wird nun um den Winkel x (welcher in unserem Beispiel 37° beträgt) gewendet, wobei die im Aufriss zum Punkt verkürzte Diagonale JG als Umdrehungsaxe dient. Zu dem gewendeten Aufriss wird dann der Grundriss construirt.

II. Tab. XIII Der so erhaltene Grundriss der beiden Quadrate $GfJh$ und $abcd$ wird nun, wie dies
Fig. 65. in Fig. 65 ausgeführt ist, so gewendet, dass die Diagonale fh , welche im Grundriss Fig. 64 mit der Grundlinie parallel war, nun mit der Richtung RS der Grundlinie einen Winkel y (in unserem Fall 35°) macht.

Die Punkte des Grundrisses Fig. 65 in Aufriss gebracht, geben die Vertikalprojectionen $A'B'C'D'$ und $F'G'H'J'$ der beiden Quadrate $abcd$ und $fghi$. Durch jeden der Eckpunkte dieser Quadrate wird eine Schräge gezogen und auf ihr die Hälfte des Abstandes aufgetragen, um welcher der entsprechende Eckpunkt im Grundriss von der Horizontalen RS entfernt ist; es wird also

$F'f$ im Aufriss gleich $\frac{1}{2} F'f$ im Grundriss

$A'a$ „ „ „ $\frac{1}{2} A'a$ „ „

$G'g$ „ „ „ $\frac{1}{2} G'g$ „ „

u. s. w.

gemacht.

Die so im Aufriss erhaltenen Punkte $abdc$ sind die Eckpunkte des ersten, und $fghi$ sind die Eckpunkte des zweiten Quadrats im schiefwinkeligen Projectionsbilde.

In das den beiden Quadraten gemeinschaftliche Achteck wird dann in bekannter Weise die Ellipse eingezeichnet.

Fig. 66 und 67 erläutern die Construction des schiefwinkligen Projectionsbildes für die gegebene Stellung des Kreises durch Bestimmung von 12 Punkten seines Umfangs. II. Tab. XIV
Fig. 66 u. 67.

Nach den bisherigen Besprechungen bedürfen wohl die Figuren 66 u. 67 keiner weiteren Erläuterung und zwar um so weniger, da man mit Hülfe der in den Figuren beigesetzten Buchstaben die Operationen genau verfolgen kann.

Auch bei diesen Figuren ist der Radius des Kreises 2 Centimeter, der Winkel $x = 37^\circ$ und der Winkel $y = 35^\circ$. Das schiefwinklige Projectionsbild des Kreises, die Ellipse $abcd \dots m$ in der oberen Fig. 67 muss also vollkommen gleich sein der Ellipse in der oberen Fig. 65.

In Fig. 68 ist das schiefwinklige Projectionsbild desselben Kreises für den Fall construiert, dass $x = 37^\circ$ und $y = 0$ ist, d. h. für den Fall, dass die Ebene des Kreises einen Winkel von 37° mit der Horizontalen macht, dass aber der horizontale Durchmesser ag derselben rechtwinklig auf der Bildfläche steht. II. Tab. XIV
Fig. 68.

In Fig. 69 endlich ist das schiefwinklige Projectionsbild desselben Kreises (2 Centimeter Radius) bei gleicher Neigung gegen die Horizontale ($x = 37^\circ$) aber für den Fall construiert, dass der horizontale Durchmesser ag desselben mit der Bildfläche parallel ist. II. Tab. XIV
Fig. 69.

Zu weiterer Uebung construiren der Schüler das schiefwinklige Projectionsbild eines Kreises von 2 Zoll Durchmesser, dessen Ebene einen Winkel von 50 Graden mit der Horizontalen macht und zwar für den Fall, dass der horizontale Durchmesser des Kreises mit der Bildfläche

- 1) einen Winkel von 0° ,
- 2) einen Winkel von 45° ,
- 3) einen Winkel von 90° ,
- 4) einen Winkel von 135° ,
- 5) einen Winkel von 180°

macht, wobei noch zu bemerken ist, dass diese Winkel stets in der Richtung zu zählen sind, wie der Winkel y im Grundriss Fig. 65.

Zu weiterer Uebung ist das schiefwinklige Projectionsbild des Fig. 39 Tab. VII im Grund- und Aufriss dargestellten Körpers zu construiren, nachdem derselbe zuerst um eine horizontale rechtwinklig zur Bildfläche stehende Kante um 20° , und dann um eine vertikale Axe soweit gedreht worden ist, dass die Kante, welche zuerst als Umdrehungsaxe gedient hatte, in ihrer neuen Lage einen Winkel von 30° mit ihrer alten Lage macht.

Bei der Ausführung dieser Aufgabe kann man von den am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkungen Gebrauch machen.

Durchdringungen ebenflächiger Körper. Die Polygone, in welchen sich ebenflächige Körper bei ihrer gegenseitigen Durchdringung schneiden, lassen sich nach den bisher besprochenen Principien auch im schiefwinkligen Projectionsbilde leicht construiren. Es kann dies auf zweierlei Weise geschehen, nemlich:

- 1) indem man das Durchschnittspolygon erst im Grund- und Aufriss construiert, und davon Punkt für Punkt in das schiefwinklige Projectionsbild überträgt, oder
- 2) indem man die Durchschnittslinien erst im schiefwinkligen Projectionsbilde construiert.

Als Beispiel des ersten Verfahrens wollen wir die Durchdringung eines vertikalen und eines horizontalen rectangulären Prismas nehmen, welche in Fig. 75, Tab. XIX des ersten Buches im Grund- und Aufriss dargestellt sind.

Nachdem man das schiefwinkelige Projectionsbild der vertikalen und der horizontalen II. Tab. XV Ecksäule gezeichnet hat, wie es Fig. 70, Tab. XV geschehen ist, misst man auf der Kante Fig. 70. pr von p nach rechts eine Länge ab, welche gleich ist der Länge pa in Fig. 75, Tab. XIX der ersten Abtheilung. Auf diese Weise erhält man den Punkt a im schiefwinkeligen Projectionsbilde. In gleicher Weise wird qb , fg , h , an u. s. w. in Fig. 70 der Tab. XV gleich gemacht den gleichnamigen Längen des Aufrisses der Fig. 75 auf Tab. XIX der ersten Abtheilung. Es werden alsdann in Fig. 70 die Linien ag , ah , gn , nb u. s. w. gezogen. — Auf gleiche Weise ergibt sich auch das Durchschnittspolygon auf der rechten Seite der vertikalen Ecksäule.

Zur Uebung construiren der Schüler nach dem eben besprochenen Verfahren auch das schiefwinkelige Projectionsbild der sich durchdringenden Körper Fig. 74, 76 und 77 auf Tab. XIX der ersten Abtheilung.

Zur Erläuterung des zweiten Verfahrens wollen wir das schiefwinkelige Projectionsbild der beiden sich durchdringenden schiefen Ecksäulen Fig. 77 auf Tab. XIX der ersten Abtheilung construiren.

Nachdem man wieder das schiefwinkelige Projectionsbild der beiden schiefen Säulen con- II. Tab. XV struirt hat, wie es Fig. 71 auf Tab. XV geschehen ist, ergibt sich zunächst der Punkt a als Fig. 71. Durchschnitt der Kanten af und mq , der Punkt b aber als Durchschnittspunkt der Kanten af und ko .

Einen zweiten Durchschnittspunkt der Flächen $lpqm$ und $abgf$ erhält man, wenn man ganz nach der in §. 28 der ersten Abtheilung besprochenen Weise in entsprechender Höhe zwischen a und b eine horizontale Ebene legt, und die Quadrate construirt, in welchen dieselbe die beiden schiefen Säulen schneidet.

Im schiefwinkeligen Projectionsbilde erscheinen diese Durchschnittsquadrate als Parallelogramme $k'l'm'n'$ und $f'g'h'i'$, welche den oberen Endflächen $klmn$ und $fghi$ gleich sind. Der Durchschnittspunkt der Seiten $l'm'$ und $f'g'$, welcher mit b bezeichnet ist, ist nun ein zweiter, den Flächen $lpqm$ und $fgba$ gemeinschaftlicher Punkt, man hat also nur von a über b eine Gerade bis zum Durchschnitt mit der Kante lp zu ziehen, um den Punkt c zu finden, in welchem die Kante lp die Fläche $fgab$ schneidet. Von c hat man nun nach b zu ziehen u. s. w.

Als fernerer hierher gehöriges Beispiel mögen die beiden horizontalen quadratischen Prismen Fig. 82, Tab. XXI der ersten Abtheilung dienen. Das schiefwinkelige Projections- II. Tab. XV bild der beiden Prismen ist in Fig. 72, Tab. XV ausgeführt. Die beiden oberen Kanten st Fig. 72. und yz schneiden sich im Punkte a ; die beiden Kanten uv ¹⁾ und wx schneiden sich im Punkte p . Es sind also a und p zwei Punkte, welche den Flächen $stvu$ und $yzxw$ gemeinschaftlich sind, folglich ist auch ap die Linie, in welcher sich diese beiden Flächen schneiden.

In ähnlicher Weise ergeben sich die Durchschnittslinien aq , bp , bq , ao , bo , an und bn .

Aus Fig. 72 ist nun zunächst das schiefwinkelige Projectionsbild des den beiden Prismen II. Tab. XV gemeinschaftlichen Kernes, des Octaëders $aqpob$ für sich allein nach Fig. 73 übertragen. Fig. 73.

In Fig. 73 ist nun aber ferner das Bild des Körpers construirt, welcher übrig bleibt, wenn die Ecken q , p , o und n durch vertikale Flächen abgeschnitten werden, welche durch die Punkte f und d , f und c , d und g , c und g gelegt sind, kurz es ist in Fig. 73 das perspectivische Projectionsbild des Körpers ausgeführt, dessen Grund- und Aufriss in Fig. 84, Tab. XXII

¹⁾ In Fig. 72 soll der äusserste Buchstaben links u statt a heissen.

der ersten Abtheilung construirt worden ist. Man hat auf diese Weise das schiefwinkelige Projectionsbild des Rhombendodekaëders erhalten, welches dem durch mehrfache Wendungen in Fig. 86, Tab. XXII der ersten Abtheilung erhaltenen Aufriss ähnlich ist.

Durchdringung krummer Oberflächen. Die Durchschnittscurven, welche gebildet 11 werden, wenn eine krumme Oberfläche von einem ebenflächigen Körper oder von einer anderen krummen Oberfläche durchdrungen wird, können im schiefwinkeligen Projectionsbilde nach den beiden im vorigen Paragraphen erläuterten Methoden dargestellt werden; in den meisten Fällen aber ist nur die erstere derselben mit Vortheil in Anwendung zu bringen.

Nach dieser ersten Methode ist in Fig. 74 Tab. XVI das schiefwinkelige Projectionsbild II. Tab. XVI der Durchschneidung eines Kegels und einer schräg liegenden Ecksäule construirt, welche in Fig. 74. Fig. 18, Tab. XXXI der ersten Abtheilung im Grund- und Aufriss dargestellt wurde. Nachdem das schiefwinkelige Projectionsbild des Kegels und der Ecksäule construirt sind, wird die Durchschnittscurve unmittelbar aus dem Aufriss des Aufrisses Fig. 18 übertragen (in Fig. 74 ist es die zart ausgezogene Curve $a'c'g'$)¹⁾.

Durch die einzelnen Punkte dieser übertragenen Curve werden nun in der bekannten Weise Schräge gezogen, wie es in unserer Figur durch den Punkt c' geschehen ist und auf diesen Längen abgeschnitten, welche gleich sind der Hälfte des Abstandes des entsprechenden Punktes im Grundriss der Fig. 18 (Tab. XXXI der ersten Abtheilung) von der Linie pt , es wird also z. B. $c'c''$ in Fig. 74 gleich gemacht der Hälfte des Perpendikels, welches man im Grundriss Fig. 18 von c' auf die Mittellinie pt fallen kann.

Hat man auf diese Weise eine genügende Anzahl von Punkten im schiefwinkeligen Projectionsbilde bestimmt, so werden dieselben durch eine Curve verbunden, welche dann wie $a'c'g'$ das schiefwinkelige Projectionsbild der Durchschnittscurve ist.

Nach dieser Methode construirt man das schiefwinkelige Projectionsbild der Körper und ihre Durchschnittscurven, welche in Fig. 12, Tab. XXIX, Fig. 13 und 14, Tab. XXX, Fig. 19 und 20, Tab. XXXII der ersten Abtheilung im Grund- und Aufriss dargestellt sind.

Nach der zweiten der im vorigen Paragraphen besprochenen Methoden ist das Bild Fig. 75 construirt. Zunächst ist das schiefwinkelige Projectionsbild der Körper construirt, II. Tab. XVI deren Grund- und Aufriss in Fig. 13, Tab. XXX der ersten Abtheilung gegeben ist. Fig. 75.

Eine durch den Punkt o der Kegelaxe gelegte horizontale Ebene schneidet die Ecksäule in einem länglichen Rechteck, dessen schiefwinkeliges Projectionsbild $nepq$ Fig. 75, Tab. XVI leicht zu construiren ist. Dieselbe horizontale Ebene schneidet aber den Kegel in einem Kreise, dessen schiefwinkeliges Projectionsbild nach den bekannten Regeln zu construiren ist. Dieser zur Ellipse verkürzte Kreis wird nun durch die Linie ne in den Punkten a und b geschnitten, welche zwei Punkte der gesuchten Durchschnittscurven sind.

Eine durch die Kanten sr und tu gelegte Horizontalebene schneidet den Kegel gleichfalls in einem Kreise, dessen schiefwinkeliges Projectionsbild zu construiren ist (diese Ellipse ist in unserer Figur nicht ausgeführt); wo dieselbe durch die Kante rs geschnitten wird, sind zwei weitere Punkte c und d der gesuchten Curven, welche gezogen werden können, nachdem man auf dieselbe Weise noch eine Reihe weiterer Punkte ermittelt hat.

¹⁾ Die Uebertragung dieser Curve von der Tab. XXXI der ersten Abtheilung auf unsere Tab. XVI ist nicht ganz richtig ausgeführt.

Es ist klar, dass dieses Verfahren hier äusserst umständlich und zeitraubend ist, weil zur Bestimmung einzelner Punkte der Durchschnittscurve vorher erst das schiefwinkelige Projectionsbild horizontaler Kreise construirt werden muss.

Die Vortheile, welche bei der Construction der Durchschnittscurven im Grund- und Aufriss dadurch gewonnen wurden, dass die durchschneidenden Ebenen zu Linien, die durchschneidenden Cylinder zu Kreisen verkürzt erschienen, fallen hier beim schiefwinkeligen Projectionsbilde weg.

12 Verkürzungsverhältnisse. Nach den Betrachtungen in §. 3 ist es leicht zu übersehen, dass die Länge, mit welcher ein begränztes Stück einer rechtwinkelig zur Bildfläche stehenden Linie im schiefwinkeligen Projectionsbilde erscheint, von der Richtung der Projectionslinien abhängt. Wir wollen nun diesen Zusammenhang etwas näher untersuchen.

II. Tab. XVII In Fig. 76, Tab. XVII ist ein Stück einer rechtwinkelig zur Bildfläche stehenden Linie im Fig. 76. Grund- und Aufriss dargestellt. b ist der vordere, a ist der hintere Endpunkt dieses Liniestückes. RS sei die Horizontalprojection der Bildfläche.

Der Punkt a ist durch die Linie aA , der Punkt b ist durch die Linie bB auf die Bildfläche projicirt. Es versteht sich von selbst, dass die projicirenden Linien für alle Punkte des Gegenstandes parallel sein müssen, dass also in unserem Fall aA und bB parallel sind.

Im Grundriss machen die projicirenden Linien aA und bB einen Winkel y mit der auf der Bildfläche rechtwinkelig stehenden Linie ab . Im Aufriss machen die beiden in eine zusammenfallenden Projectionslinien bB und aA einen Winkel x mit der Horizontalen.

Da A und B die Punkte sind, in welchen die schiefen durch a und b gelegten Projectionslinien die Bildfläche treffen, so ist, wie auch schon aus den Erörterungen des §. 3 hervorgeht, BA im Aufriss der Fig. 76 das schiefwinkelige Projectionsbild der Linie ba .

Die Länge des Bildes BA , welche wir mit L bezeichnen wollen, steht nun in einem bestimmten Grössenverhältniss zur wahren Länge der Linie ab , welche mit l bezeichnet werden soll. Offenbar aber hängt das Grössenverhältniss zwischen l und L von der Grösse der Winkel x und y ab.

Bei der praktischen Ausführung schiefwinkliger Projectionsbilder nimmt man eben für x willkürlich eine passend erscheinende Winkelgrösse, und zwar haben wir bei unseren bisherigen Zeichnungen für x stets einen Winkel von 30° genommen. Ferner haben wir stets $L = \frac{1}{2} l$ gemacht, ohne weiter zu erörtern, welchen Werth der Winkel y haben müsse, damit bei gegebenem Werthe von x das genannte Grössenverhältniss stattfinde.

Für die Praxis ist die Kenntniss der Abhängigkeit zwischen den Längen L , l und dem Winkel y vollkommen gleichgültig. Der Vollständigkeit wegen wollen wir dasselbe aber doch näher betrachten.

Im Allgemeinen ist klar, dass bei unverändertem Werthe von x , und bei unveränderter Länge von ab das schiefwinkelige Projectionsbild AB um so grösser ausfallen wird, je grösser y wird.

Umgekehrt wird bei unverändertem Werthe des Winkels y das schiefwinkelige Projectionsbild AB der Linie ab um so grösser werden, je mehr x wächst.

Suchen wir nun die Beziehungen zwischen l , L , x und y schärfer zu bestimmen.

Im Grundriss der Figur ist offenbar $BA = bn$, es ist aber

$$bn = ab \cdot \tan y$$

$$bn = l \cdot \tan y$$

Es ist aber ferner BC des Aufrisses gleich der Länge BA im Grundriss, mithin haben wir auch

$$BC = l \cdot \tan y$$

Aus dem Dreieck BAC des Aufrisses ergibt sich aber, dass

$$BA = \frac{BC}{\cos x}$$

oder wenn wir für BA seinen Werth L , für BC seinen Werth $l \cdot \tan y$ setzen

$$L = \frac{l \cdot \tan y}{\cos x}$$

Nach dieser Formel kann man nun leicht berechnen, wie gross der Winkel y sein muss, damit für $x = 30^\circ$, $L = \frac{1}{2} l$ werde. Setzt man letzteren Werth für L in obige Gleichung, so kommt:

$$\frac{1}{2} l = \frac{l \cdot \tan y}{0,866}$$

da ja $\cos 30^\circ = 0,866$ ist, oder

$$\frac{1}{2} \cdot 0,866 = \tan y$$

$$\tan y = 0,433$$

mithin

$$y = 23^\circ 25'.$$

Beim Zeichnen schiefwinkliger Projectionsbilder ist das Verhältniss $l : L = 1 : 2$ allerdings das gewöhnlichste; es kommen deren aber auch noch andere vor. In manchen Fällen, und zwar namentlich beim Zeichnen von Krystallen nimmt man, während x gewöhnlich gleich 30° bleibt, $L = \frac{1}{3} l$. In diesem Falle ergibt sich dann

$$\tan y = \frac{1}{3} \cdot 0,866 = 0,288$$

$$y = 16^\circ 4'.$$

Ferner werden öfters schiefwinkelige Projectionsbilder ausgeführt, in welchen $L = l$ genommen wird, so dass in diesen Zeichnungen die drei Hauptdimensionen des Körpers in ihrer wahren Länge erscheinen. Damit nun $L = l$ sei, muss für $x = 30^\circ$

$$\tan y = 0,866$$

also

$$y = 40^\circ 53'$$

sein.

In Fig. 77, Fig. 78 und Fig. 79 auf Tab. XVII ist das schiefwinkelige Projectionsbild eines und desselben Würfels mit verschiedenen Graden der Verkürzung der auf der Bildfläche rechtwinkelig stehenden Längen dargestellt. In Fig. 77 erscheinen nemlich die auf der Bildfläche rechtwinkelligen Kanten zu $\frac{1}{3}$, und in Fig. 78 erscheinen sie zu $\frac{1}{2}$ ihrer wahren Länge verkürzt, während in Fig. 79 auch die auf der Bildfläche rechtwinkelligen Dimensionen in ihrer wahren Länge aufgetragen sind.

II. Tab. XVII
Fig. 77, 78
u. 79.

Vergleichen wir diese drei Darstellungen desselben Körpers mit einander, so bietet ohne Zweifel Fig. 77 das gefälligste Bild. In vielen Fällen ist aber dieses Verkürzungsverhältniss (auf $\frac{1}{3}$ der wahren Länge) nicht zweckmässig, weil bei so starker Verkürzung gar manche Details nur schwer aufzutragen und auszuführen sind. In dieser Beziehung erscheint das bei Fig. 79 in Anwendung gebrachte Verkürzungsverhältniss das vortheilhafteste, weil hier auch die zur Bildfläche rechtwinkelligen Dimensionen in ihrer wahren Grösse aufgetragen werden,

und deshalb eignet sich das Verkürzungsverhältniss $1 : 1$ auch am meisten für Werkzeugzeichnungen, überhaupt für Zeichnungen, nach welchen die dargestellten Gegenstände körperlich ausgeführt werden sollen. Dagegen muss man gestehen, dass die Fig. 79 durchaus kein gefälliges Bild darbietet und dass sie nicht den Eindruck eines Würfels, sondern vielmehr den Eindruck eines Langwürfels macht.

Zwischen den beiden Verkürzungsverhältnissen $3 : 1$ und $1 : 1$, welche in Fig. 77 und in Fig. 79 in Anwendung gebracht sind, steht in Beziehung auf Vortheile und Nachtheile das Verkürzungsverhältniss $2 : 1$ in der Mitte, nach welchem die Fig. 78 ausgeführt ist.

II. Tab. XVII In Fig. 80, Fig. 81 und Fig. 82 ist ein und dasselbe reguläre Octaëder für verschiedene Verkürzungsverhältnisse der zur Bildfläche rechtwinkeligen Dimensionen dargestellt. Die beiden Axen ab und cd sind, als der Bildfläche parallel mit ihren wahren Dimensionen (hier 4 Centimeter) aufgetragen, während die dritte, auf der Bildfläche rechtwinkelige Axe fg in Fig. 80 gleich $\frac{1}{3}$ und in Fig. 81 gleich $\frac{1}{2}$ ihrer wahren Länge aufgetragen ist. In Fig. 82 endlich ist die Axe fg ebenso gross gemacht wie die beiden anderen Axen.

Auch hier giebt entschieden das Verkürzungsverhältniss $\frac{1}{3}$ das gefälligste Bild Fig. 80, während in Fig. 82 der Körper so verzerrt erscheint, dass die Zeichnung durchaus nicht den Eindruck eines regulären Octaëders macht.

In der That hat man auch, wie bereits bemerkt wurde, das Verkürzungsverhältniss $3 : 1$ zur Darstellung von Krystallen fast allgemein angenommen, weil es das anschaulichste Bild der Krystalle liefert und die oben angeführten Nachtheile dieser Verkürzung hier nicht in Betracht kommen.

II. Tab. XVII In Fig. 83, Fig. 84 und Fig. 85 ist endlich auch ein und derselbe horizontale Kreis in Fig. 83, 84 den eben besprochenen drei Verkürzungsverhältnissen dargestellt.

In allen bisherigen Zeichnungen ist der Winkel α , welchen die auf der Bildfläche rechtwinkelig stehenden Linien im schiefwinkeligen Projectionsbilde mit der Horizontalen machen, gleich 30° genommen worden, was wohl in den meisten Fällen auch der passendste Werth für den Winkel α sein dürfte. Eine Vergrösserung dieses Winkels macht nicht allein die Länge der in Wirklichkeit rechtwinkelig zur Bildfläche stehenden Linien im schiefwinkeligen Projectionsbilde grösser, sondern sie vergrössert überhaupt die Aufsicht auf die obere Seite der darzustellenden Körper. Eine Vergrösserung des Winkels α wird also überall da zu empfehlen sein, wo auf der oberen Fläche des darzustellenden Körpers schwierige Details vorkommen.

Bei einer Zeichnung, bei welcher es darauf ankommt, dass man die Dimensionen der einzelnen Theile des dargestellten Körpers in derselben abmessen könne, muss natürlich das Verkürzungsverhältniss auf irgend eine Weise angegeben sein, etwa in der Art, wie es in Fig. 77 bis 85 auf Tab. XVII geschehen ist.

13 **Axonometrische Projection.** Denselben Zweck, welchen wir durch die schiefwinkelige Projection erreicht haben, kann man auch noch auf andere Weise erreichen. So geben z. B. der Grund- und Aufriss des regulären Octaëders Fig. 79 auf Tab. XX der 1. Abthl. durchaus kein übersichtliches Bild, durch zwei Wendungen ist aber dort das Octaëder in eine solche Lage gebracht worden, dass es nun im Aufriss Fig. 81, Tab. XXI d. 1. Abthl. in ähnlicher Weise als ein übersichtliches Bild erscheint, wie das schiefwinkelige Projectionsbild Fig. 80 der Tab. XVII.

Man braucht also nur den Körper, dessen Hauptdimensionen parallel mit der Grund-

und Senkfläche sind, in entsprechender Weise zu wenden, um auch bei rechtwinkliger Projection ein übersichtliches Bild desselben zu erhalten.

Bei etwas complicirteren Gegenständen ist aber die Ausführung zweier Wendungen nicht allein ungemein mühsam und zeitraubend, sondern die Masse der Constructionslinien hat auch leicht Confusion, Ungenauigkeit und Unreinheit der Zeichnung zur Folge.

Anstatt aber den Körper gegen die Senk- (Bild-)fläche zu neigen, kann man aber auch umgekehrt bei unveränderter Stellung des Körpers die Bildfläche in entsprechender Weise gegen ihn wenden und neigen und dann auf die schräggestellte Bildfläche von allen Punkten des Körpers Perpendikel fallen.

Diese Art der rechtwinkligen Projection auf eine schräg gestellte Bildfläche wird mit dem Namen der axonometrischen Projection bezeichnet.

Es ist klar, dass die Gestalt des Projectionsbildes sich mit der Lage der Bildfläche ändert, es ist also vor allen Dingen wichtig, die Lage der Bildfläche auf sichere Weise zu bestimmen.

In Fig. 86, Tab. XVIII sollen AX , AY und AZ das schiefwinkelige Projectionsbild II. Tab. XVIII dreier zu einander rechtwinkligen Axen darstellen, von denen AX und AY mit der Bildfläche parallel sind, während AZ rechtwinklig auf ihr steht. Fig. 86.

In das durch die Axen AX , AY , AZ gebildete körperliche Eck kann man sich die darzustellenden Körper eingestellt denken, wie es in unserer Figur mit dem Würfel $ABCD$, $EFGH$ geschehen ist.

Die Lage der schräg gestellten Bildfläche, auf welche das axonometrische Bild des Körpers (in unserem Falle des Würfels) dargestellt werden soll, kann nun dadurch bestimmt werden, dass man die Punkte R , S und T bestimmt, in welchen die Bildfläche jede der drei Axen schneidet.

Wird nun auf die, durch die drei Punkte R , S und T gelegte Bildfläche von jedem Punkt des Körpers $ABC \dots H$ ein Perpendikel gefällt, so erhält man die axonometrische Projection $abc \dots h$ derselben.

Im axonometrischen Projectionsbilde machen nun die Kanten ab , ag und ad , welche die Richtung der Hauptdimensionen des Körpers im Bilde darstellen, bestimmte Winkel mit einander, deren Grösse von der Lage der Bildfläche RST abhängt. Ebenso wird die Kante ab in einem bestimmten Verhältniss gegen AB , ag in einem bestimmten Verhältniss gegen AG und ad in einem bestimmten Verhältniss gegen AD verkürzt erscheinen, welches gleichfalls durch die Lage der Bildfläche RST bedingt ist.

Wie die Grösse der Winkel bag , bad und dag im Bilde, wie ferner die Verkürzungsverhältnisse der Hauptdimensionen des Körpers in der Richtung ab , ag und ad mit der Lage der Bildfläche zusammenhängt, wollen wir nicht näher untersuchen, da es sich hier nur um die Definition, nicht aber um eine ausführliche Besprechung der axonometrischen Projection handelt.

Hat man einmal für eine bestimmte Lage der Bildfläche die Grösse der Winkel bag und bad , sowie die Verkürzungsverhältnisse für die drei Hauptdimensionen des Körpers bestimmt, so kann man mit Hülfe dieser Data das axonometrische Projectionsbild jedes Körpers in einer hier nicht näher zu besprechenden Weise ausführen.

Die axonometrische Projection liefert Bilder von gefälligem Aussehen, allein sie ist weit umständlicher auszuführen, weil keine der drei Hauptdimensionen des Körpers im Bilde

in ihrer wahren Länge erscheint, was bei der schiefwinkeligen Projection für zwei der Hauptdimensionen der Fall ist.

Dadurch eben, dass zwei Hauptdimensionen des Körpers im schiefwinkeligen Projectionsbilde unverkürzt erscheinen, ist wesentlich die leichtere Ausführbarkeit bedingt, wie sie denn auch gerade dieses Umstandes wegen für Werkzeichnungen besonders geeignet ist.

Bei der axonometrischen Projection sowohl wie bei der schiefwinkeligen sind alle in der Wirklichkeit parallelen Linien auch im Bilde einander parallel; man kann deshalb diese beiden Projectionsarten mit dem gemeinschaftlichen Namen der Parallelperspective bezeichnen.

14 Isometrische und anisometrische Projection. Mit dem Namen der isometrischen Projection bezeichnet man eine solche, bei welcher die drei Hauptdimensionen des Körpers in gleicher Länge erscheinen.

Es kann dies sowohl bei der schiefwinkeligen, wie auch bei der axonometrischen Projection stattfinden.

Fig. 79 auf Tab. XVII ist das schiefwinkelige isometrische Projectionsbild eines Würfels.

Fig. 82 und Fig. 85 sind die schiefwinkeligen isometrischen Projectionsbilder eines regulären Octaëders und eines horizontal liegenden Kreises.

Bei der schiefwinkeligen isometrischen Projection erscheinen die drei Hauptdimensionen des Körpers in ihrer wahren Länge, also unverkürzt.

Wenn das axonometrische Projectionsbild ein isometrisches sein soll, so muss die Bildfläche RST , Fig. 86, gegen die drei Axen AX , AY und AZ gleich geneigt sein, die drei Punkte R , S und T müssen also in gleicher Entfernung von dem Punkte A liegen, in welchem diese drei Axen zusammentreffen.

II. Tab. XVIII Fig. 87, Tab. XVIII stellt das axonometrisch-isometrische Bild eines Würfels dar, dessen Kanten mit den Axen AX , AY und AZ parallel gestellt sind.

In diesem Bilde erscheinen alle drei Würfelkanten gleich gross, allein keine erscheint in ihrer wahren Länge, alle sind in gleichem Verhältniss verkürzt.

Jede der drei Würfelkanten, welche im vorderen Würfeck e zusammentreffen, macht mit jeden der beiden anderen einen Winkel von 120° .

Das hintere Würfeck a wird in diesem axonometrisch-isometrischen Bilde von dem vorderen Würfeck e gedeckt.

Anisometrisch nennt man ein schiefwinkeliges Projectionsbild sowohl als auch ein axonometrisches, wenn die drei Hauptdimensionen des Körpers nicht in gleichem Verhältniss zu ihrer wahren Länge erscheinen. So sind z. B. die Figuren 77, 78, 80 und 81 auf Tab. XVII anisometrische schiefwinkelige Projectionsbilder.

DRITTES BUCH.

KONISCHE PROJECTION

ODER

MALERISCHE PERSPECTIVE.

Definitionen. Denken wir uns von den einzelnen Punkten A, B, C u. s. w., Fig. 1, 15 Tab. I, irgend eines Körpers Linien nach dem ihn beschauenden Auge O gezogen, so bilden dieselben einen Strahlenkegel, dessen Basis durch die Konturen des Gegenstandes und dessen Spitze durch das ihn beschauende Auge gebildet wird. III. Tab. I. Fig. 1.

Wird nun zwischen dem Gegenstand und dem Auge irgend eine ebene Fläche RS , etwa eine Glastafel oder ein Blatt Papier aufgestellt, so wird diese Ebene den besprochenen Strahlenkegel schneiden. Dieser Durchschnitt des Strahlenkegels mit der Ebene RS ist das perspectivische Bild des Gegenstandes, welcher den Strahlenkegel ins Auge sendet.

Der von A nach dem Auge O gehende Strahl trifft die Fläche RS , welche wir die Bildfläche nennen wollen, im Punkte a . Es ist also a das Bild von A . Ebenso ist b das Bild von B , c ist das Bild von C u. s. w.

Von O aus gesehen wird der Punkt A durch a , B durch b , C durch c u. s. w. gedeckt.

Werden auf die Bildfläche die Linien ab, ae, ad, bc u. s. w. gezogen, so werden sie von O aus gesehen genau die Kanten AB, AE, AD, BC u. s. w. decken, es ist also ab das Bild von AB , ae ist das Bild von AE , ad ist das Bild von AD u. s. w.

Es ist ferner das Viereck $abcd$ das Bild der Fläche $ABCD$, das Viereck $bchg$ ist das Bild der Fläche $BCHG$ u. s. w. Kurz die ganze Figur $abcd, bchg, abgfe$ ist das Bild des Körpers, dessen Eckpunkte mit $A, B, C \dots H$ bezeichnet sind.

Es ist eben angeführt worden, dass das Bild einer geraden Linie ebenfalls eine gerade Linie sein müsse. Es ist dies leicht zu beweisen. Es sei KJ eine gerade Linie, deren einzelne Punkte Strahlen in das Auge O senden. Die Gesammtheit aller Strahlen, welche von den einzelnen Punkten der Linie KJ ins Auge O gelangen, bildet eine ebene Fläche, nämlich das Dreieck KJO . Wird nun zwischen das Auge O und die Linie KJ die Bildfläche RS gebracht, so ist der Durchschnitt des Dreiecks KJO mit der Bildfläche RS das Bild der Linie KJ . Da nun aber der Durchschnitt zweier ebener Flächen stets eine gerade Linie ist, so muss auch der Durchschnitt ki der Bildfläche R mit dem ebenen Dreieck KJO nothwendig eine gerade Linie sein. Das Bild einer geraden Linie ist gleichfalls eine gerade Linie.

16 **Das Bild paralleler Linien.** Eine jede gerade Linie, welche gerade gegen das beobachtende Auge hin gerichtet ist, erscheint demselben zum Punkt verkürzt.

III. Tab. I Es sei z. B. durch den Punkt a der Bildfläche RS , Fig. 2, Tab. I, eine gerade Linie aB
Fig. 2. so gelegt, dass sie nach vorn verlängert das Auge O trifft, so ist klar, dass für das Auge O der Punkt B durch den Punkt a gedeckt ist, dass also die ganze Linie aB in a zum Punkt verkürzt erscheint.

Es gehe nun durch einen zweiten Punkt f eine Linie fG parallel mit aB , so wird diese dem Auge O jedenfalls nicht zum Punkt verkürzt erscheinen können, weil ihre Verlängerung nach vorn hin nicht durch den Punkt O geht.

Eine von G nach dem Auge O gezogene gerade Linie trifft die Bildfläche in g , es ist also g das perspectivische Bild von G und die gerade Linie fg ist das perspectivische Bild der Geraden fG .

Die Richtung der Linie fg ist aber von der Art, dass ihre Verlängerung durch den Punkt a gehen muss, in welchem die Gerade aB zum Punkt verkürzt erscheint.

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich durch die folgende Betrachtung beweisen.

Die Ebene, welche man durch die parallelen Linien aB und fG sich gelegt denken kann, schneidet die Bildfläche in der Geraden af . Nun aber fällt die Linie GO , welche den in der Richtung der Linie Ba liegenden Punkt O mit dem auf der Linie AG liegenden Punkt G verbindet, offenbar auch in die durch die beiden Linien aB und fG gelegten Ebene, folglich muss die Linie GO die Bildfläche auch in einem Punkte g treffen, welcher der Linie fa angehört, fg ist also ein Stück der Linie fa .

Dasselbe gilt nun auch für alle anderen mit der zum Punkt verkürzten Linie aB parallel laufenden. Das Bild einer durch den Punkt c parallel mit ab laufenden Linie cD wird also von c nach a gerichtet sein. Das Bild d des Punktes D ist der Durchschnittspunkt der Linien ca und DO .

Das Bild ih der durch den Punkt i der Bildfläche parallel mit aB laufenden Linie erhält man, wenn man eine Gerade von i nach a zieht und dann den Punkt h ermittelt, in welchem ia durch HO geschnitten wird.

So sehen wir denn, dass die Bilder der drei Linien cD , fG und iH , welche unter sich parallel sind, gegen einen Punkt a convergiren. Der Punkt a ist aber derjenige Punkt, in welchem eine durch das Auge O parallel mit den Linien cD , fG und iH gelegte Gerade die Bildfläche trifft.

Hierin zeigt sich also ein wesentlicher Unterschied zwischen der schiefwinkeligen und axonometrischen Projection einerseits, und der eigentlichen oder malerischen Perspective andererseits.

In den Bildern, welche durch die beiden erstgenannten Projectionsarten erhalten werden, erscheinen alle Linien parallel, welche in der Wirklichkeit einander parallel sind, weshalb man sie auch unter dem gemeinschaftlichen Namen der Parallelperspective zusammenfassen kann; die eigentliche oder malerische Perspective dagegen liefert Bilder, in denen alle Linien gegen einen Punkt hin convergiren, welche in der Wirklichkeit einander parallel sind.

Damit hängt nun auch ferner zusammen, dass im eigentlich perspectivischen Bilde die Gegenstände um so kleiner erscheinen, je weiter sie hinter der Bildfläche zurückliegen, wäh-

rend bei der Parallelperspective der Abstand des Objects von der Bildfläche keinen Einfluss auf die Grösse seines Bildes hat.

Augenpunkt und Distanzpunkt. In Fig. 1 sowohl als in Fig. 2 der Tab. I ist, 17 um die Beziehungen zwischen dem Gegenstand und seinem perspectivischen Bilde anschaulich zu machen, die Bildfläche RS in schiefwinkliger Projection dargestellt, das Bild selbst erscheint also hier verkürzt und verschoben. Nur dann wird man das Bild in seiner wahren Gestalt erhalten, wenn die Bildfläche unverkürzt erscheint.

In der Regel (und wir betrachten im Folgenden auch nur diesen Fall) nimmt man zur Bildfläche eine vertikale Ebene, welche sich zwischen dem Gegenstand und dem Auge befindet.

In diesem Sinne stelle das längliche Rechteck $VRST$ auf Tab. II die unverkürzte Bild- III. Tab. II. fläche dar, welche im Grundriss zur geraden mit der Grundlinie parallelen Linie VS verkürzt erscheint.

Der Gegenstand befindet sich hinter der Bildfläche $VRST$, das Auge o des Beschauers befindet sich vor derselben.

Denken wir uns von dem Auge o des Beschauers ein Perpendikel auf die Bildfläche gefällt, so ist dies eine im Grundriss Tab. II unverkürzt erscheinende horizontale Linie oO , welche die Bildfläche in einem Punkte O trifft, den wir mit dem Namen des Augenpunktes bezeichnen wollen.

Denken wir uns ferner von allen Punkten des hinter der Bildfläche stehenden Gegenstandes Perpendikel auf dieselbe gefällt, so erhalten wir den Aufriss des Gegenstandes.

Bei der Lehre vom Grund- und Aufriss haben wir zur Bildfläche des Aufrisses eine hinter dem Gegenstand befindliche Vertikalebene genommen, während wir uns hier, wo es sich um die Construction perspectivischer Bilder handelt, die Ebene des Aufrisses als vor dem Gegenstand befindlich denken müssen. Dass in beiden Fällen der Aufriss selbst vollkommen derselbe ist übersieht man leicht, wenn man bedenkt, dass die Bildfläche im letzteren Falle der Bildfläche des früheren Falles parallel ist.

Um das perspectivische Bild irgend eines Gegenstandes construiren zu können, muss die Position des Gegenstandes und des Auges zur Bildfläche bestimmt sein, d. h. es muss die Stelle des Augenpunktes O im Aufriss des Gegenstandes und der Abstand Oo des Auges von der Bildfläche bekannt sein.

Eine auf der Bildfläche durch den Augenpunkt O gezogene horizontale Linie HH' ist die Horizontlinie.

Die Construction eines jeden perspectivischen Bildes beginnt damit, dass man auf dem Papier, auf welchem sie ausgeführt werden soll, die Stelle des Augenpunktes O bezeichnet und dann durch denselben die Horizontlinie HH' zieht. Nachdem dies geschehen ist, werden auf der Horizontlinie rechts und links vom Augenpunkt O die Punkte D und D' bezeichnet, welche vom Augenpunkte O ebenso weit entfernt sind, als das Auge o von der Bildfläche absteht; für den auf Tab. II dargestellten Fall hat man also im Aufriss $OD = OD'$ gleich der Länge oO des Grundrisses zu machen.

Die so bestimmten Punkte D und D' heissen die Distanzpunkte, eben weil ihr Abstand vom Augenpunkte gleich ist der Distanz des Auges von der Bildfläche.

Hier mag übrigens gleich bemerkt werden, dass es zur Ausführung eines perspectivischen

Bildes durchaus nicht nöthig ist, dass die Stellung des Auges o im Grundriss wirklich verzeichnet sei.

Denken wir uns vom Auge nach den beiden Distanzpunkten gerade Linien gezogen, so sind dies horizontale Linien, welche, wie man aus dem Grundriss Tab. II ansehen kann, einen Winkel von 45° sowohl mit der Bildfläche VS , als auch mit dem vom Auge auf die Bildfläche gefällten Perpendikel oO machen.

Wir wollen die durch das Auge gelegten horizontalen Linien, welche einen Winkel von 45° mit der Bildfläche machen, die Diagonalen nennen, und zwar ist oD die linke und oD' die rechte Diagonale.

- 18 **Linien, welche im Bilde gegen den Augenkpunkt und gegen die Distanzpunkte convergiren.** Nach dem, was in §. 16 besprochen wurde, müssen alle Linien des darzustellenden Gegenstandes, welche rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen, im Bilde nach demjenigen Punkte convergiren, in welchem eine durch das Auge gelegte gleichfalls rechtwinkelig auf der Bildfläche stehende Linie dieselbe trifft. Dieser Punkt ist aber der Fusspunkt des vom Auge auf die Bildfläche gefällten Perpendikels, es ist der Punkt, welchen wir als Augenkpunkt bezeichnet haben. Daraus ergibt sich also der Satz:

„Alle Linien des Gegenstandes, welche rechtwinkelig zur Bildfläche stehen, convergiren im Bilde gegen den Augenkpunkt.“

Da wir die Bildfläche als vertikal annehmen, so ist klar, dass alle rechtwinkelig auf der Bildfläche stehenden Linien wagerecht sind.

In der Figur auf Tab. II sollen A , B und C drei Punkte der unteren Gränzlinie RT der Bildfläche sein. Die Linien AA' , BB' , CC' , welche nun hinter der Bildfläche rechtwinkelig zu derselben durch die Punkte A , B und C gelegt sind, müssen also obiger Regel zu Folge im Bilde sämmtlich nach dem Augenkpunkt O convergiren, sie werden also hier, wie man in der oberen Hälfte der Tab. II sieht, welche das Bild darstellt, die Richtung AO , BO und CO haben.

Es seien ferner F , G und K höher gelegene Punkte der Bildfläche, durch welche die Linien FF' , GG' und KK' rechtwinkelig zur Bildfläche gelegt sind, so werden diese Linien im Bilde die Lage FO , GO und KO haben.

Aus dem Grundsatz des Paragraph 16 folgt ferner, dass alle Linien des Gegenstandes, welche parallel sind mit der linken Diagonale oD im Bilde gegen den linken Distanzpunkt D convergiren müssen.

Die Linien AA'' , BB'' , CC'' , FF'' , GG'' und KK'' , welche im Grundriss der Tab. II durch die Punkte A , B , C , F , G und K parallel mit oD laufen, müssen in dem auf dem oberen Theile der Tab. II dargestellten perspectivischen Bilde von den Punkten A , B , C , F , G und K nach D laufen.

Endlich müssen alle Linien des Gegenstandes, welche mit der rechten Diagonale parallel laufen, im Bilde gegen den rechten Distanzpunkt convergiren.

Die Linien also, welche im Grundriss Tab. II die Lage AA''' , BB''' , CC''' , FF''' , GG''' und KK''' haben, werden im Bilde gegen D' convergiren, sie werden also im Bilde die Richtung AD' , BD' , CD' , FD' , GD' und KD' haben.

Schliesslich wollen wir noch daran erinnern, dass die beiden als Diagonale bezeichneten Linien oD und oD' horizontale sind, dass also alle mit ihnen parallel laufende Linien

gleichfalls horizontal sind. Die in diesem Paragraphen besprochenen Regeln beziehen sich also auf gerade horizontale Linien, welche entweder rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen (und diese convergiren im Bilde gegen den Augenzentrum), oder solche, welche einen Winkel von 45° mit der Bildfläche machen (und diese convergiren im Bilde gegen einen der Distanzpunkte).

Die eben besprochenen aus Paragraph 16 sich ergebenden Regeln bilden die Grundlage zur Construction aller perspectivischen Bilder.

Bestimmung eines Punktes im perspectivischen Bilde. Wenn die Lage eines Punktes im Grund- und Aufriss gegeben, wenn ausserdem die Lage der Bildfläche fixirt und auf derselben die Stellung des Augenzentrums und der beiden Distanzpunkte aufgetragen ist, so kann man das perspectivische Bild dieses Punktes mit Hülfe der im vorigen Paragraphen entwickelten Regeln bestimmen, wie dies durch Tab. III erläutert werden soll. 19

Im unteren Theile der Tab. III stellt Fig. 1 den Grundriss einer quadratischen Pyramide $abcfs$, und Fig. 2 den eines rechteckigen Klotzes $gnik lmpq$ dar. Die horizontale Linie XY ist der Grundriss der Bildfläche. Man ersieht aus dem Grundriss, wie weit jeder einzelne Eckpunkt der beiden Körper hinter der Bildfläche liegt. III. Tab. III Fig. 1 u. 2.

Auf der oberen Hälfte der Tab. III ist dem Grundriss entsprechend der Aufriss der besprochenen Körper mit ganz feinen Linien aufgetragen. In diesem Aufriss ist alsdann die Horizontlinie HH' gezogen, aus deren Lage man ersieht, in welcher Höhe sich das Auge befindet. Auf dieser Horizontlinie sind endlich der Augenzentrum O und die beiden Distanzpunkte D und D' aufgetragen.

Aus dem Abstand der Distanzpunkte von dem Augenzentrum ersieht man, wie weit das Auge vor der Bildfläche sich befindet.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun zur Construction der einzelnen Punkte im perspectivischen Bilde übergehen, und zwar wollen wir mit der Pyramidenspitze s beginnen.

Ein von s im Grundriss auf die Bildfläche XY gefällttes Perpendikel trifft dieselbe in einem Punkte S , welcher im Aufriss gerade vor der Pyramidenspitze liegt.

Die Linie Ss steht nun rechtwinkelig auf der Bildfläche, sie wird also im perspectivischen Bilde die Richtung von S nach O haben, das perspectivische Bild der Pyramidenspitze muss also jedenfalls auf der von S nach O gezogenen Geraden liegen.

Es werde nun ferner auf der Bildfläche ein Punkt s' bezeichnet, welcher in gleicher Höhe mit S , also auf einer durch S im Aufriss gezogenen Horizontalen liegt, und welcher sich eben so weit rechts von S befindet, wie der Punkt s im Grundriss hinter der Bildfläche, d. h. man mache Ss' im Aufriss gleich Ss im Grundriss. Im Grundriss liegt dieser Punkt s' auf der Linie XY und ebenso weit rechts von S , wie s hinter S liegt.

Eine im Grundriss von s' nach s gezogene Linie macht einen Winkel von 45° mit der Bildfläche; sie ist parallel mit derjenigen Linie, welche wir im vorigen Paragraphen als linke Diagonale bezeichneten, sie muss also im perspectivischen Bilde als eine von s' nach dem linken Distanzpunkt gerichtete Linie erscheinen.

Das perspectivische Bild der Pyramidenspitze s muss aber jedenfalls auf der von s' nach D gezogenen Linie liegen. Da wir nun aber oben gesehen haben, dass es sich auch auf der Linie SO befinden muss, so befindet es sich jedenfalls auf dem Schnittpunkt der Linien SO und $s'D$.

So ergibt sich denn folgende ganz allgemein gültige Regel:

Um das perspectivische Bild irgend eines Punktes s zu finden, betrachte man denselben als Eckpunkt eines horizontalen Quadrats $sSs's''$, dessen Seiten gleich sind dem Abstand des Punktes s von der Bildfläche und dessen eine Seite Ss' in die Bildfläche selbst fällt. Nachdem man die Punkte S und s' auch im Aufriss markirt hat, wird von S eine gerade Linie nach dem Augenzentrum, und von s' eine solche nach dem Distanzpunkt gezogen. Das gesuchte Bild s des Punktes s liegt alsdann auf dem Durchschnitt der Linien SO und $s'D$.

Auf der durch S im Aufriss gezogenen Horizontalen wurde der im Grundriss abgemessene Abstand nach der rechten Seite hin abgemessen und von dem so erhaltenen Punkt s' nach dem linken Distanzpunkt gezogen; es versteht sich von selbst, dass man von S aus die gleiche Länge auch nach der linken Seite hin hätte abmessen, und von dem so gefundenen Punkt s'' nach dem rechten Distanzpunkt hätte ziehen können.

Im letzteren Falle würden aber die beiden Linien sich unter spitzerem Winkel geschnitten haben als im ersten, und deshalb ist das erstere Verfahren hier vorzuziehen.

Wenn der Punkt des Aufrisses, von welchem aus man nach dem Augenzentrum zieht, links vom Augenzentrum liegt, so ist es vortheilhafter, den Abstand des Punktes von der Bildfläche nach der rechten Seite aufzutragen, wie dies für die Punkte der Pyramide auf Tab. III geschehen ist. Dagegen ist es vortheilhafter, jenen Abstand nach der linken Seite aufzutragen, wenn der Punkt, dessen Bild gesucht wird, rechts vom Augenzentrum liegt, wie die Eckpunkte des rechteckigen Klotzes auf Tab. III.

Um das perspectivische Bild a des Punktes a zu finden, ist vom Punkte A im Aufriss, welcher mit dem Aufriss von a zusammenfällt, eine Linie AO nach dem Augenzentrum gezogen; alsdann auf der durch A im Aufriss gezogenen Horizontalen die Länge Aa' gleich Aa des Grundrisses abgemessen und von a' nach D gezogen. Das gesuchte Bild a des Punktes a liegt nun auf dem Durchschnitt von AO und $a'D$.

Auf gleiche Weise ist nun auch das Bild der Punkte b , c und f construirt, und zwar sind in unserer Figur alle Constructionslinien gezogen, so dass der Leser das hier in Anwendung gebrachte Verfahren ohne weitere Erläuterung verfolgen kann.

Nachdem alle Eckpunkte der quadratischen Pyramide im Bilde bestimmt sind, hat man noch die Linien ab , bc , cf und fa , ferner sa , sb , sc und sf zu ziehen. In den meisten Fällen werden die nicht sichtbaren Kanten sf , fa und fc gar nicht ausgezogen und es wäre alsdann auch die Bestimmung des Punktes f überflüssig gewesen.

Nach demselben Verfahren kann man auch das perspectivische Bild aller Punkte des rechteckigen Klotzes $gniklm pq$ ermitteln, und somit auch das perspectivische Bild dieses Klotzes selbst erhalten.

Ueberhaupt reichen die in diesem Paragraphen besprochenen Regeln hin, um das perspectivische Bild jedes Gegenstandes zu construiren, welcher im Grund- und Aufriss gegeben ist, da man nach diesen Regeln ja jeden Punkt desselben im Bilde bestimmen kann. In speciellen Fällen lassen sich Vereinfachungen in Anwendung bringen, von denen wir die wichtigsten weiter unten besprechen werden.

Um die obigen Grundregeln der Perspective zunächst etwas einzuüben, construire man das perspectivische Bild der Körper, welche auf Tab. III im Grund- und Aufriss dargestellt sind, noch einmal, aber für den Fall, dass der Augenzentrum bei gleicher Höhe von HH'

um 1 Centimeter ($\frac{1}{8}$ Zoll) weiter nach rechts liege und dass der Abstand der Distanzpunkte vom Augenpunkte 6 Centimeter (2 Zoll) betrage.

Um diese Aufgabe zu lösen, muss natürlich der Schüler die Punkte des Aufrisses auf ein anderes Papierblatt übertragen und auf diesem alsdann die weiteren Operationen ausführen.

Technische Bemerkungen. In Betreff der technischen Ausführung mögen hier noch 20 einige Bemerkungen folgen. Auf Tab. III sind, des rascheren Ueberblicks wegen, Augenpunkt und Distanzpunkte etwas stark markirt; es darf dies natürlich bei der Ausführung einer perspectivischen Construction, bei welcher es auf Genauigkeit ankommt, nicht geschehen, weil eben runde Flecke keine mathematische Punkte sind.

Bei der Construction etwas grösserer und complicirter Bilder ist es unumgänglich nöthig, das Papier auf ein Reissbrett aufzuspannen. Um alsdann das Ziehen der vielen Linien nach dem Augenpunkt und nach den Distanzpunkten zu erleichtern, kann man im Augenpunkt sowohl wie in den Distanzpunkten feine Stiftchen, etwa feine Nähnadeln, rechtwinkelig zur Ebene des Brettes einschlagen, und an diese Stifte dann das Lineal anlegen.

Die Constructionslinien, welche gegen den Augenpunkt und gegen die Distanzpunkte convergiren, werden nur mit Bleistift gezogen, und nachdem man die Punkte des Bildes gefunden und die Linien des Bildes mit Tusch ausgezogen hat, wieder ausgewischt.

Ebenso werden die Linien des Aufrisses, welche auf Tab. III schwach ausgezogen sind, nur mit Bleistift gezogen und nach der Vollendung des Bildes wieder ausgewischt. Ja, es ist nicht einmal nöthig, die Linien des Aufrisses auch nur mit Bleistift auszuziehen, wenn es nicht deshalb geschieht, um eine leichtere Uebersicht zu erhalten und Verwirrung unter den einzelnen Punkten des Aufrisses zu vermeiden.

Flächen, welche mit der Bildfläche parallel sind. In einem schiefwinkligen 21 Projectionsbilde erscheinen alle geradlinig oder krummlinig begränzte ebenen Figuren, deren Ebene mit der Bildfläche parallel ist, nicht allein in ihrer wahren Gestalt, sondern auch in ihrer wahren Grösse, d. h. ebenso gross als ob sie unmittelbar mit der Bildfläche in Berührung wären. Der Abstand von der Bildfläche hat keinen Einfluss auf die Grösse des Bildes. So ist z. B. das hintere Sechseck des Bildes Fig. 17, Tab. III der zweiten Abtheilung dem vorderen Sechseck $AB C D F G$ ganz gleich.

Bei den conischen Projectionsbildern verhält sich die Sache anders. Das perspectivische Bild aller ebenen Figuren, deren Ebene der Bildfläche parallel ist, ist stets diesen Figuren selbst ähnlich; das Bild wird aber um so kleiner, je weiter die Figur hinter die Bildfläche zurücktritt.

So ist z. B. auf Tab. III $gnki$ ein längliches Rechteck, dessen wahre Gestalt und Grösse gleich $GNKJ$ im Aufriss ist. Das perspectivische Bild $gnfi$ dieses Rechtecks ist zwar $GNKJ$ ähnlich, aber kleiner.

Die hintere Fläche $lmqp$ des Klotzes ist der Bildfläche gleichfalls parallel; sie ist der vorderen $gnki$ ganz gleich, aber sie liegt weiter von der Bildfläche entfernt und deshalb ist ihr perspectivisches Bild $lmqp$ zwar $gnfi$ ähnlich aber weit kleiner.

Dass das perspectivische Bild einer jeden ebenen Figur, deren Ebene mit der Bildfläche parallel ist, ihr selbst ähnlich sein muss, ergiebt sich aus folgender einfacher Betrachtung.

Wenn eine gerade oder schiefe Pyramide, deren Basis ein beliebiges Polygon ist, oder

wenn ein gerader oder schiefer Kegel, dessen Basis eine beliebige krummlinige Figur ist, von einer Ebene durchschnitten wird, welche mit der Basis parallel ist, so ist die Durchschnitsfigur jederzeit der Figur der Basis ähnlich.

Wenn nun der Strahlenkegel, dessen Basis irgend eine ebene Figur und dessen Spitze das Auge ist, von einer (Bild-) Fläche geschnitten wird, welche der Basis parallel ist, so muss auch hier die Durchschnitsfigur der Basis ähnlich sein.

Wenn z. B. der Strahlenkegel*), dessen Basis das Viereck $CBGH$, Fig. 1, Tab. I, und dessen Spitze das Auge O ist, von einer Bildfläche RS geschnitten wird, welche der Ebene $CBGH$ parallel ist, so muss der Durchschnitt des Kegels und der Bildfläche, nemlich das Bild $cbgh$ der Basis $CBGH$ ähnlich sein.

22 Die Bilder vertikaler und mit der Bildfläche paralleler horizontaler Linien.

Ein weiterer für die Construction perspectivischer Bilder wichtiger Satz ist der: dass alle senkrechte Linien im Bilde wieder als senkrechte Linien erscheinen (vertikal stehende Bildfläche vorausgesetzt).

So sind z. B. auf Tab. III die vertikalen Linien ml , ng , fi und pq die perspectivischen Bilder der vertikalen Kanten ml , ng , ki und pq .

Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich daraus, dass irgend zwei vertikale Ebenen sich nur in einer vertikalen Linie schneiden können. Da nun eine Ebene, welche durch eine vertikale Linie und das Auge gelegt ist, jedenfalls eine vertikale ist, so kann also auch ihr Durchschnitt mit der vertikalen Bildfläche nur eine vertikale Linie sein.

Ferner ist das Bild einer horizontalen mit der Bildfläche parallelen Linie jedenfalls wieder eine horizontale Linie.

So sind z. B. auf Tab. III die horizontalen Linien gi , nf , lp und mq die Bilder der horizontalen mit der Bildfläche parallelen Kanten gi , nk , lp und mq .

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus folgender Betrachtung.

In Fig. 1, Tab. I sei HG eine horizontale mit der Bildfläche RS parallele Linie, so ist nach den obigen Definitionen der Durchschnitt des Dreiecks HGO mit der Bildfläche RS , also die Linie hg das Bild von HG . Zunächst lässt sich beweisen, dass die der Bildfläche RS angehörige Linie hg nothwendig mit HG parallel sein muss; denn wäre sie nicht mit HG parallel, so müssten die beiden Linien HG und hg bei genügender Verlängerung sich jedenfalls schneiden, da sie ja in einer und derselben Ebene HGO liegen. Wenn sich aber die Linien HG und hg schnitten, so müsste nothwendig auch eine durch hg gelegte Vertikalebene bei genügender Ausdehnung mit der Verlängerung von HG zusammentreffen, was gegen die Voraussetzung ist (da wir ja die Bildfläche RS als parallel der Linie HG angenommen haben).

Ist aber hg parallel mit HG , so muss auch hg horizontal sein, wenn HG es ist.

Die eben besprochenen Sätze gewähren oft grosse Erleichterungen in der Construction perspectivischer Bilder: Hat man z. B. auf Tab. III von G , J , K und N Linien nach dem Augenpunkt O gezogen und auf die bekannte Weise mit Hülfe des Distanzpunktes D' das Bild n des Punktes n gefunden, so kann man das Bild der übrigen drei Eckpunkte g , k und i der vorderen Fläche erhalten, ohne dass man weiter von dem Distanzpunkt Gebrauch macht;

*) Wir gebrauchen hier den Ausdruck „Kegel“ in seiner allgemeinsten Bedeutung, nach welcher Pyramiden als Kegel von geradlinig begränzter Basis zu betrachten sind.

man zieht nemlich durch n zunächst eine vertikale Linie bis zum Durchschnitt mit GO und erhält so den Punkt g . Sodann zieht man durch n eine Horizontale bis zur Durchschneidung mit KO , und erhält so den Punkt f . Der Punkt i ergibt sich, wenn man durch f eine Vertikale und durch g eine Horizontale zieht.

In gleicher Weise kann man die hintere Fläche des Klotzes behandeln. Das Bild l eines Punktes derselben wird nach dem Fundamentalverfahren mit Hülfe des Distanzpunktes bestimmt, wie man es auf Tab. III ausgeführt sehen kann; von l wird sodann eine Vertikale herunter gezogen bis zum Durchschnitt mit MO , um den Punkt m , eine Horizontale bis zum Durchschnitt mit PO , um den Punkt n zu finden u. s. w.

Um sowohl den im §. 19 erläuterten Fundamentalsatz der Perspective, als auch die in III. Tab. IV. diesem Paragraphen besprochenen Abkürzungsmethoden einzuüben, construirt man das perspectivische Bild der auf Tab. IV im Grund- und Aufriss dargestellten Körper, deren Schattirung nur dazu dienen soll, die Zeichnung leichter verständlich zu machen.

Horizontale Quadrate. Bei der Construction des perspectivischen Bildes horizontal liegender Quadrate können bedeutende Abkürzungen in Anwendung gebracht werden:

- 1) wenn zwei Seiten des Quadrats mit der Bildfläche parallel sind,
- 2) wenn eine Diagonale des Quadrats mit der Bildfläche parallel ist.

Es sei auf Tab. V $abcf$ der Grundriss eines horizontalen Quadrats, dessen Seiten ab III. Tab. V. und cf mit der Bildfläche XY parallel laufen. Nachdem man im Aufriss das Bild a des Punktes a nach dem bekannten in §. 19 erläuterten Verfahren ermittelt hat, kann man die übrigen drei Eckpunkte des Quadrats im Bilde finden, ohne weiter nöthig zu haben, im Grundriss ihren Abstand von der Bildfläche abzumessen.

Der Punkt b ergibt sich als Durchschnittspunkt der von B nach dem Augenspunkt gezogenen Linie BO und der durch a gezogenen Horizontalen.

Wird diese Horizontale bis zum Durchschnitt mit GO verlängert, so ergibt sich das Bild g des vorderen Eckpunkts g des Quadrats $cbgh$. Warum? wird sich der aufmerksame Leser wohl selbst beantworten können.

Um das Bild f des Eckpunkts f zu finden, hat man nur von b nach D zu ziehen. Der gesuchte Punkt f ist der Durchschnittspunkt von AO und bD .

Ist f ermittelt, so ergeben sich c und h , wenn man von f eine Horizontale bis zur Durchschneidung mit BO und GO zieht.

Auf dem Durchschnitt der Linie AO mit der von c nach D gezogenen Linie liegt der Punkt i , das Bild des Eckpunktes i u. s. w.

Ganz in der gleichen Weise wird das Bild einer Quadratreihe construirt, deren Grundriss, mit deren der eben besprochenen zusammenfällt, die aber einer Horizontalebene angehören, welche über der Horizontlinie liegt. Die Construction ist auf Tab. V ausgeführt.

Gehen wir nun zur Construction des Bildes solcher Quadrate über, deren eine Diagonale mit der Bildfläche parallel läuft, wie dies bei den Quadraten $lmnp$, $lpsq$, $pnrt$ u. s. w. auf Tab. V der Fall ist.

Zunächst werden nach den bekannten Regeln im Aufriss die Linien QO , LO , NO und RO gezogen, und alsdann das Bild des Punktes l nach dem Fundamentalsatz der Perspective bestimmt, indem man im Aufriss von L aus in horizontaler Richtung nach der linken Seite hin die Länge $L'l'$ gleich Ll des Grundrisses aufträgt und von l' nach D' zieht.

l ist der eine Endpunkt der mit der Bildfläche parallelen Diagonale ln . Um das Bild des anderen Endpunkts n zu finden, hat man nur von l eine Horizontale bis zur Durchschneidung mit NO zu ziehen.

Nachdem man die Bilder l und n der beiden seitlichen Eckpunkte l und n erhalten hat, ergeben sich die Bilder der vorderen und hinteren Eckpunkte m und p desselben Quadrates sehr leicht. Man ziehe DI und verlängere sie nach vorn; ebenso ziehe man $D'n$ und verlängere auch diese Linie nach vorn bis zum Durchschnitt mit der verlängerten Linie DI . Das gesuchte Bild m des Punktes m ist der Durchschnittspunkt der beiden nach vorn verlängerten Linien DI und $D'n$. Warum?

Das Bild p des Punktes p liegt auf dem Durchschnittspunkt der Linien lD' und nD . Warum?

Es ist ferner r , das Bild des Punktes r , der Durchschnittspunkt von nD' und RO , ebenso wie q auf dem Durchschnitt von lD und QO liegt.

Man braucht nur von q nach D' eine Linie zu ziehen, um s zu finden, welcher auf dem Durchschnitt von qD' mit IO liegt; dem entsprechend findet man auch den Punkt t als Durchschnitt von rD mit NO , oder auch als Durchschnitt von rD mit lD' .

Wir werden weiter unten, bei der Construction der perspectivischen Bilder von Kreisen noch besondere Veranlassung finden, von den oben besprochenen Sätzen Anwendung zu machen.

- 24 **Die Accidentalpunkte.** Wir haben oben in §. 16 gesehen, dass jedes System gerader Linien, welche unter einander parallel sind, im perspectivischen Bilde als ein System gerader Linien erscheint, welche gegen einen bestimmten Punkt convergiren.

Für zwei specielle Fälle haben wir bereits die Lage dieser Convergenzpunkte kennen gelernt, nemlich den Augenpunkt, wenn das System gerader Linien einen Winkel von 90° , und die Distanzpunkte, wenn das System der geraden unter einander parallelen horizontalen Linien einen Winkel von 45° mit der Bildfläche macht.

Mit dem Namen eines Accidentalpunktes bezeichnet man einen solchen Punkt des perspectivischen Bildes, nach welchem die Bilder eines Systems von Linien convergiren, welche unter sich parallel sind, aber weder rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen, noch horizontal laufend einen Winkel von 45° mit derselben machen.

Für eine Reihe unter sich paralleler Linien von beliebiger Richtung, welche im Grund- und Aufriss gegeben sind, kann man die Lage des Accidentalpunktes durch eine einfache Construction ermitteln. Man wähle unter den parallelen Linien zwei möglichst weit von einander abstehende aus, bezeichne auf der ersten zwei Punkte a und b , deren Bilder a und b man auf die bekannte Weise bestimmt (natürlich müssen zu diesem Zweck Augenpunkt und Distanzpunkte gegeben sein). Ebenso ermittelt man die Bilder c und f zweier Punkte c und f der zweiten Linie. Da nun, wo sich die Verlängerungen der Linien ab und cf schneiden, ist der gesuchte Accidentalpunkt.

Dieses Verfahren vereinfacht sich noch, wenn die parallelen Linien, für welche man den Accidentalpunkt sucht, horizontale Linien sind, weil alsdann ihr Accidentalpunkt aus leicht zu übersehenden Gründen auf der Horizontlinie liegen muss. Man braucht alsdann nur das Bild einer der parallelen, nicht in der Horizontalebene des Auges liegenden Geraden zu construiren, und dasselbe bis zum Durchschnitt mit der Horizontlinie zu verlängern.

Da nun an Gebäuden, Maschinen, Apparaten, Meubeln u. s. w., deren perspectivische Bilder construiert werden sollen, vielfach solche horizontale unter sich parallele Linien vorkommen, welche weder rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen, noch einen Winkel von 45° mit derselben machen, so wollen wir die Bestimmung des Accidentalpunktes für solche Fälle etwas ausführlicher besprechen.

Der untere Theil der Tab. VI stellt den Grundriss eines kleinen rectangulären Gebäudes III. Tab. VI. dar, welches gegen die Bildfläche XY in der Weise schräg gestellt ist, dass die beiden vorderen Wände VV und SS ungleiche Winkel mit XY machen, und zwar so, dass der Winkel, welchen VV mit XY macht, kleiner ist als 45° , während der Winkel, welchen SS mit XY macht, grösser ist als 45° .

Nach der obigen Auseinandersetzung müssen nun sämmtliche horizontale Linien auf der Wand VV im perspectivischen Bilde nach einem, alle horizontalen Linien auf der Wand SS nach einem zweiten Accidentalpunkt convergiren.

Im Aufriss sind nur die Hauptlinien des Gebäudes mit feinen Linien aufgezeichnet. Um die Uebersicht nicht zu beeinträchtigen, sind die Details, wie Fenster, Treppenstufen u. s. w., im geometrischen Aufriss weggelassen. Dagegen ist die Horizontlinie gezogen und auf ihr der Augenpunkt und die Distanzpunkte markirt.

Die oberste Kante der Wand VV (die Unterbrechungen der Zinnen abgerechnet) ist ab . Die Richtung dieser Linie im Bilde ergibt sich, wenn man nach dem Fundamentalsatz in §. 19 das Bild a des Punktes a und das Bild b des Punktes b bestimmt (die dazu nöthigen Hülfslinien AO und $a'D$, sowie BO und $b'd$ sind im Aufriss der Tab. VI gezogen). Wird nun die Linie ab bis zur Durchschneidung mit der Horizontlinie verlängert, so ist der Durchschnittspunkt Z derjenige Accidentalpunkt, nach welchem alle horizontalen Linien der Wand VV im Bilde convergiren.

Die untere Kante der Wand VV ist ig . Hat man nach dem bekannten Verfahren das Bild i des Punktes i gefunden, so hat man nur von i nach Z eine Linie zu ziehen, um die Richtung der Kante ig im Bilde zu finden. Das Bild g des Punktes g ergibt sich als Durchschnitt der Linien iZ und GO .

Wird durch g eine Vertikale gezogen, und dann von K eine Linie nach dem Augenpunkt O (sie ist auf Tab. VI nicht gezogen), so erhält man das Bild f des Punktes k als Durchschnittspunkt dieser beiden Linien.

Das Bild l des Punktes l liegt da, wo eine von Z über f gezogene Gerade die durch i gezogene Vertikale schneidet.

Das Bild n des Punktes n ist der Durchschnittspunkt der von b gezogenen Senkrechten und der von N nach O gezogenen Linie.

Die Kante nm muss im Bilde nach dem Accidentalpunkt Z convergiren, man erhält also ihre Richtung, wenn man eine Gerade von Z über n zieht.

Die obere und untere Kante der in der Wand VV befindlichen Fenster convergiren gleichfalls gegen den Accidentalpunkt Z .

Um den Accidentalpunkt Z' zu finden, nach welchem alle horizontalen Linien der Wand SS im perspectivischen Bilde convergiren, bedarf es nur noch der Bestimmung des Punktes f , welcher das Bild des oberen hinteren Ecks f der Wand SS ist. Man findet bekanntlich f , wenn man von F im Aufriss nach O zieht, dann von F nach der linken Seite in horizontaler Richtung die Länge Ff' abmisst, welche gleich ist dem im Grundriss zu messen-

den Abstand des Punktes f von der Bildfläche XY , und endlich von dem so bestimmten Punkte f' nach D' zieht; es ist alsdann f der Schnittpunkt von FO und $f'D'$.

Verlängert man die Linie af bis zum Durchschnitt mit der Horizontlinie, so findet man den Accidentalpunkt Z' .

Die Construction aller übrigen horizontalen Linien der Wand SS , welche im Bilde sämmtlich nach Z' convergiren, bedarf nun wohl keiner weiteren Erläuterung mehr.

Die horizontalen Kanten der in der Wand SS befindlichen Thür convergiren im Bilde gleichfalls gegen Z' , ebenso die mit der Wand SS parallelen horizontalen Kanten der Treppenstufen, während die horizontalen auf der Wand SS rechtwinkelig stehenden Kanten gegen den Accidentalpunkt Z convergiren.

Die Bilder p, r u. s. w. der Eckpunkte p, r u. s. w. der auf der Wand VV befindlichen Zinnen sind die Schnittpunkte der Linie aZ mit den von P, R u. s. w. im Aufriss nach dem Augenpunkt O gezogenen Linien.

Auf ähnliche Weise ergeben sich im Bilde die Eckpunkte der auf der Wand SS befindlichen Zinnen.

Die Kanten der auf VV sitzenden Zinnen, welche zur Ebene dieser Wand rechtwinkelig sind, convergiren im Bilde gegen Z' .

Die mit VV parallelen Kanten der auf SS sitzenden Zinnen convergiren im Bilde gegen den Accidentalpunkt Z .

Wir haben oben (§. 22) das perspectivische Bild des Kreuzdenkmals Fig. 1, Tab. IV construirt, ohne noch von den Accidentalpunkten Kenntniss zu haben. Man construire nun noch einmal das perspectivische Bild desselben Gegenstandes für die gleiche Lage des Augenpunktes und der Distanzpunkte, aber mit Anwendung der entsprechenden Accidentalpunkte und man wird finden, welche beträchtliche Erleichterung dieselben gewähren.

Um den Inhalt dieses Paragraphen noch weiter einzuüben, construire der Schüler das perspectivische Bild des auf Tab. VI dargestellten kleinen Gebäudes bei unveränderter Stellung desselben, bei unveränderter Lage der Horizontlinie und des Augenpunktes O , aber mit dem Unterschiede, dass die Distanzpunkte weiter von O entfernt sind als auf Tab. VI, und zwar soll der Abstand eines jeden der Distanzpunkte von O gleich sein der Entfernung ZO auf Tab. VI.

Dadurch, dass die Distanzpunkte weiter von O entfernt sind als auf Tab. VI (dass also das Auge von der Bildfläche sowohl als dem Gegenstand weiter absteht), werden auch die beiden Accidentalpunkte weiter von O weggerückt erscheinen, zur Lösung der oben gestellten Aufgabe bedarf es also eines weit breiteren Papiere als das der Tab. VI.

Eine Folge davon, dass Z und Z' weiter von O wegrücken, wird namentlich auch die sein, dass in dem neu zu construirenden Bilde die Linien aZ, mZ, lZ, iZ u. s. w. auf der einen und aZ', iZ' u. s. w. auf der anderen Seite einen weit kleineren Winkel mit der Richtung der Horizontalen machen als die gleichnamigen Linien der Tab. VI.

- 25 **Perspectivische Fehler.** Wenn man nach den gegebenen Regeln das perspectivische Bild irgend eines Gegenstandes durch Construction ausführt, so können Fehler nur durch Irrthum oder durch Ungenauigkeit entstehen, sehr leicht dagegen schleichen sich perspectivische Fehler in architektonischen und landschaftlichen Freihand-Zeichnungen ein, sei es nun, dass dieselben erfunden oder nach der Natur aufgenommen sind, wenn der Zeichner mit den

Gesetzen der Perspective vollständig unbekannt ist. Selbst beim Zeichnen nach der Natur gehört eine sehr scharfe Beobachtung und ein sehr geübtes Augenmaass dazu, um ohne Kenntniss der perspectivischen Regeln Verstösse gegen dieselben zu vermeiden; kein Wunder also, wenn sie auf Gemälden und Zeichnungen aller Art so häufig vorkommen. Ein geübtes Auge wird aber durch solche Fehler ebenso beleidigt, wie ein musikalisches Ohr durch einen falschen Accord.

Die am häufigsten vorkommenden perspectivischen Fehler bestehen darin, dass horizontale einander parallele Linien, welche, wie wir gesehen haben, im Bilde unter allen Umständen nach einem Punkte auf der Horizontlinie convergiren sollten, nach solchen Punkten convergiren, welche bald über bald unter der Horizontlinie liegen. So sieht man nicht selten landschaftliche Darstellungen, in welchen die einander parallelen Ufer eines Flusses gegen einen Punkt am Himmel zusammenlaufen, als ob der Fluss in die Höhe strömte, während umgekehrt die eines Baugesimses im Bilde bei ihrer Verlängerung in einem Punkte zusammenreffen, welcher unter der Horizontlinie liegt.

Alle derartigen Fehler wird derjenige zu vermeiden wissen, welcher mit den Regeln der Perspective vertraut ist, deren Kenntniss also nicht allein dem construirenden Zeichner, sondern auch für den Freihandzeichner von der höchsten Wichtigkeit ist.

Kreise, welche mit der Bildfläche parallel sind. Wir haben bereits in §. 21 gesehen, dass alle ebenen Figuren, welche der Bildfläche parallel sind im Bilde, wenn auch verkleinert, doch ihrer wahren Gestalt ähnlich sind. Ein der Bildfläche paralleles Quadrat wird also auch im Bilde als Quadrat, ein mit der Bildfläche paralleler Kreis wird also auch im perspectivischen Bilde als Kreis erscheinen. 26

Da nun ein Kreis vollkommen bestimmt ist, wenn man die Lage seines Mittelpunktes und die Länge seines Halbmessers kennt, so genügt es, um das perspectivische Bild eines mit der Bildfläche parallelen Kreises zu erhalten, das Bild zweier Punkte zu ermitteln, nemlich das Bild des Mittelpunktes und das Bild des äusseren Endpunktes eines der Kreisradien; am leichtesten aber findet man das Bild des Endpunktes eines horizontalen Halbmessers.

In Fig. 1, Tab. VII sei acb der Grundriss eines mit der Bildfläche parallelen Kreises, III. Tab. VII welcher im Aufriss unverkürzt erscheint, und welchen wir der Kürze halber mit I bezeichnen wollen. C ist die Projection seines Mittelpunktes auf die Bildfläche, B ist die Projection des äusseren Endpunktes eines seiner beiden horizontalen Radien auf dieselbe. Sobald nun noch die Lage der Horizontlinie HH' , des Augenpunkts O und der beiden Distanzpunkte D und D' gegeben ist, wie es auf Tab. VII in der That der Fall ist, so ist es nun leicht, nach obigen Bemerkungen das perspectivische Bild des Kreises I zu construiren. Fig. 1.

Um das Bild des Mittelpunktes zu finden, hat man bekanntlich nur von C nach dem Augenpunkt und durch C eine Horizontale zu ziehen, auf welcher man C' gleich dem Abstand des Punktes c von der Bildfläche XY im Grundriss abmisst. Von c' wird eine Gerade nach dem Distanzpunkt D gezogen. Das gesuchte Bild des Kreismittelpunktes ist der Durchschnittspunkt c der Linien CO und $c'D$.

Das Bild b des Punktes b ergibt sich, wenn man von B nach O und dann von c horizontal herüber bis zur Durchschneidung mit BO zieht.

Es ist nun cb das Bild des horizontalen Kreishalbmessers cb , und man hat nur um c mit dem Radius cb einen Kreis zu ziehen, um das gesuchte Bild 1 des Kreises I zu erhalten.

Ueber dem eben construirten Kreis I soll nun aber ein zweiter, ihm völlig gleicher Kreis II so liegen, dass beide im Grundriss zusammenfallen, dass also der Mittelpunkt f des zweiten Kreises vertikal über dem Mittelpunkt c und dass ferner g vertikal über b liegt. Wie hoch der Kreis II über dem I liegen soll, ist aus dem Aufriss zu ersehen.

Das Bild dieses zweiten höher gelegenen Kreises ergiebt sich nun ganz auf dieselbe Weise wie das des Kreises I. Das Bild des Mittelpunktes liegt in $\bar{f}$.

Das Bild des äusseren Endpunktes des horizontalen Radius fg ist in g , und also ist der um $\bar{f}$ mit dem Radius $\bar{f}g$ gezogene Kreis 2 das Bild des Kreises II.

Es liege ferner gerade hinter II ein dritter Kreis III von gleichem Radius, also so, dass im Aufriss III von II vollständig gedeckt wird. Im Grundriss erscheint dieser Kreis III zur geraden Linie mni verkürzt. Wenn man nach den gegebenen Regeln das perspectivische Bild des Kreises III construiert, so ergiebt sich als solches der mit 3 bezeichnete Kreis, welcher um den Mittelpunkt n mit dem Radius ni gezogen ist.

Wäre der Kreis II die vordere, III die hintere Endfläche eines horizontal liegenden Cylinders, so müsste man, um diesen im perspectivischen Bilde darzustellen, nachdem die beiden Kreise 2 und 3 (vorerst wenigstens nur mit Bleistift) gezogen worden sind, dieselben auf der oberen sowohl wie auf der unteren Seite durch eine gemeinschaftliche Tangente verbinden.

Diese beiden Tangenten convergiren natürlich gegen den Augenpunkt.

Wenn 3 die hintere Fläche eines horizontalen Cylinders ist, so erscheint ein Theil seines Umfangs (in unserem Falle ungefähr die linke Hälfte) verdeckt, und dieser verdeckte Theil ist dann gar nicht mit Tusch oder doch nur punktirt auszuziehen.

Um die Darstellung vertikaler mit der Bildfläche paralleler Kreise mehr einzuüben, construirt man das perspectivische Bild des hohlen Cylinders, welcher in Fig. 1, Tab. VIII im Grund- und Aufriss dargestellt ist, und zwar für die auf Tab. VIII angegebene Lage des Augenpunktes und der Distanzpunkte.

27 Horizontale Kreise. Man könnte das Bild jedes horizontalen Kreises dadurch erhalten, dass man seinen Umfang im Grund- und Aufriss in eine beliebige Anzahl von Theilen theilt, alsdann nach §. 19 das perspectivische Bild der einzelnen Theilpunkte construiert, und die so erhaltenen Bilder der Theilpunkte endlich durch eine Curve verbindet.

Dies Verfahren ist jedoch ein äusserst umständliches und zeitraubendes; die Sätze, welche wir in §. 23 kennen lernten, machen es aber möglich, hier bedeutende Abkürzungen einzuführen.

III. Tab. VII
Fig. 2. Zieht man in dem Grundriss Fig. 2, Tab. VII des in Perspective zu bringenden Kreises einen Durchmesser ab , welcher parallel ist mit der Bildfläche XY , so wird dieser Durchmesser im Bilde als eine horizontale Linie erscheinen.

Ein Kreisdurchmesser fg , welcher rechtwinkelig auf der Bildfläche steht, muss im Bilde als eine gegen den Augenpunkt O hinlaufende Gerade erscheinen.

Denken wir uns die Punkte g und b , f und b , a und f , a und g durch gerade Linien verbunden, so macht jede dieser vier Linien einen Winkel von 45° mit der Bildfläche, im Bilde müssen also diese Linien gegen einen der Distanzpunkte gerichtet sein.

Hat man die vier Punkte a , f , b und g in Aufriss gebracht, und die Linien AO , FO und BO gezogen (GO fällt mit FO zusammen), und das Bild c des Kreismittelpunktes c nach dem Verfahren in §. 19 bestimmt, so ergeben sich mittelst der oben angeführten Sätze die

Bilder a , f , b und g der Punkte a , f , b und g , ohne dass man nöthig hätte, den Abstand eines dieser Punkte von der Bildfläche im Grundriss abzumessen.

Zunächst hat man nemlich nur durch c eine Horizontale zu ziehen; da wo diese die Linien AO und BO schneidet, sind die Punkte a und b .

Das Bild g des Punktes g liegt da wo die Linie GO (zusammenfallend mit FO) durch eine von b nach D gezogene Linie geschnitten wird.

Um das Bild f des vordersten Kreispunktes f zu finden, hat man nur die Linien $D'b$ nach vorn bis zur Durchschneidung mit FO zu verlängern.

Diese vier Punkte a , f , b und g genügen nun freilich noch nicht um die Ellipse, als welche der Kreis im Bilde erscheint, darüber zu ziehen. Weitere vier Punkte erhält man auf folgende Weise:

Werden in dem Grundriss des Kreises zwei Durchmesser im und kl gezogen, von welchen jeder mit der Bildfläche einen Winkel von 45° macht, so müssen diese im Bilde als Linien erscheinen, von welchen die eine mit der durch c und den Distanzpunkt D , die andere mit der durch c und den Distanzpunkt D' gelegten Geraden zusammenfällt.

Hat man nun die Punkte l und i in Aufriss gebracht, und die Linien LO und JO gezogen, so müssen die Bilder der Punkte l und m auf der Linie LO und die Bilder von i und k müssen auf der Linie JO liegen.

Demnach findet man die Punkte i und m als Durchschnittspunkte der durch c (das Bild des Kreismittelpunktes c) und D' gelegten Geraden mit JO und LO . Die Punkte l und k dagegen sind die Durchschnittspunkte der durch c und den Distanzpunkt D gelegten Geraden mit LO und JO .

Ueber die acht Punkte a , i , f , l , b , m , g und k ist nun die Ellipse zu ziehen.

Ganz nach dem eben besprochenen Verfahren ist nun in Fig. 2, Tab. VII das Bild eines horizontalen Kreises construirt, dessen Aufriss mit RN zusammenfällt, und dessen Mittelpunkt im Bilde in p liegt. — Da die Constructionslinien, durch welche die acht Punkte gefunden wurden und über welche die Ellipse gezogen ist, in unserer Figur sich finden, so ist wohl keine weitere Erläuterung nöthig.

Auf den ersten Blick wird man bemerken, dass das Bild des Kreismittelpunktes nicht in der Mitte der Ellipse erscheint, was leicht erklärlich ist, da ja die vordere Hälfte des rechtwinkelig auf der Bildfläche stehenden Durchmessers im Bilde grösser erscheinen muss als die hintere, also cf grösser als cg , und im anderen Kreisbilde ps grösser als pt .

Damit hängt es nun zusammen, dass der mit der Bildfläche parallele Durchmesser (ab im einen, rn im anderen Kreisbilde) die Ellipse, welche als Bild des Kreises erscheint, keineswegs in zwei gleiche Theile theilt. Der vordere Theil ist grösser als der hintere.

Um die Construction des perspectivischen Bildes horizontaler Kreise gehörig einzuüben, construirt man das perspectivische Bild des aus cylindrischen und conischen Stücken zusammengesetzten Körpers, welcher auf Tab. VIII in Fig. 2 im Grund- und Aufriss dargestellt ist, III. Tab. VIII und zwar für die auf Tab. VIII angegebene Lage des Augenpunktes und der Distanzpunkte. Fig. 2.

Wenn es sich um doppelt gekrümmte Rotationsformen mit vertikaler Umdrehungsaxe handelt, also z. B. um Säulensockel oder Säulencapitäle u. s. w., so muss man sie, um ihr perspectivisches Bild zu construiren, ebenso wie bei der Construction des schiefwinkligen Projectionsbildes, durch entsprechend gelegte horizontale Ebenen durchschnitten denken, und das perspectivische Bild aller der einzelnen Schnittkreise construiren, um welche alsdann, ebenso

wie es bei dem schiefwinkeligen Projectionsbilde geschehen ist, eine gemeinsame Berührungscurve gelegt wird. Um dies einzuüben, construire man das perspectivische Bild des Säulensockels Fig. 49 und des Capitäls Fig. 48 auf Tab. X der zweiten Abtheilung für eine beliebig angenommene Lage der Horizontlinie, des Augenpunktes und der Distanzpunkte.

28 **Vertikale Kreise, welche rechtwinkelig zur Bildfläche stehen.** Ein Kreis, dessen Ebene vertikal ist und zugleich rechtwinkelig auf der Bildfläche steht, wird im Grund- und Aufriss zur geraden Linie verkürzt erscheinen, wie z. B. der Kreis $abfg$ Fig. 3, Tab. VII, dessen vertikaler Durchmesser af im Grundriss, und dessen horizontaler Durchmesser bg im Aufriss zum Punkt verkürzt erscheint.

III. Tab. VII
Fig. 3.

Der Mittelpunkt c fällt im Aufriss mit bg und im Grundriss mit af zusammen, doch ist der Buchstabe c in der Figur weggelassen, um eine zu grosse Anhäufung von Buchstaben zu vermeiden.

Hat man das perspectivische Bild c des Kreismittelpunktes c ganz nach der Grundregel in §. 19 gefunden, so ergiebt sich a und f im perspectivischen Bilde, wenn man durch das Bild c des Kreismittelpunktes eine Vertikale bis zur Durchschneidung mit aO und fO zieht, denn das perspectivische Bild von a muss nach §. 19 auf der Linie aO , und nach §. 22 muss es vertikal über c liegen. Ebenso ist klar, dass das Bild f des Punktes f vertikal unter c und auf der Linie fO liegen muss.

Um die Bilder der Punkte b und g zu finden, welche den horizontalen Durchmesser des Kreises begrenzen, verfährt man in folgender Weise:

Zunächst wird durch den Punkt c , welcher das Bild des Kreismittelpunktes ist, mit dem Halbmesser ca ein (nach Vollendung des Bildes auszuwischender) Kreis und alsdann durch c eine horizontale Linie gezogen, welche den Umfang des eben gezogenen Kreises in den Punkten b' und g' trifft.

Legt man nun eine gerade Linie durch b' und D' , so ist der Schnittpunkt b derselben mit der schon gezogenen cO das Bild von b , ebenso wie der Schnittpunkt g der Linien $g'D'$ und cO das Bild von g ist.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Denken wir uns im Mittelpunkt des Kreises $abfg$, um dessen perspectivisches Bild es sich hier handelt, auf der Ebene desselben ein Perpendikel errichtet, so erscheint dasselbe im Grundriss der Fig. 3 als eine auf ag rechtwinkelige Linie. Wird auf dieser die Länge cG (der Buchstabe c ist wie schon erwähnt nicht aufgetragen; er fällt hier mit a und f zusammen) gleich cg abgemessen, so ist G offenbar derjenige Punkt, dessen perspectivisches Bild in g' erscheint.

Eine von G nach g gezogene Gerade macht nun aber einen Winkel von 45° mit der Bildfläche, und zwar ist sie der rechten Diagonale (siehe §. 17) parallel, im Bilde muss also diese Linie von g' nach D' hinlaufen, oder mit anderen Worten: das Bild g des Punktes g liegt auf der Linie $g'D'$.

Da nun aber g auch auf der Linie cO liegen muss, so kann g nur der Schnittpunkt der Linien $g'D'$ und cO sein.

Aus den gleichen Gründen ist aber auch das Verfahren richtig, durch welches das Bild b des Punktes b gefunden worden ist.

Die vier Punkte a , b , f und g genügen aber noch nicht um darüber die Ellipse zu ziehen,

welche das perspectivische Bild des Kreises $abfg$ ist. Vier weitere Punkte p , n , r und q werden auf folgende Weise gefunden.

Man markire auf dem vertikalen Durchmesser af des Kreisbildes einen beliebigen Punkt o , legt dann durch o und den Augenpunkt O eine gerade Linie, und zieht ferner durch o eine Horizontale bis zur Durchschneidung mit dem um c mit dem Halbmesser ca gezogenen Kreise. Die beiden Durchschnittspunkte dieser Horizontalen mit dem Kreise seien mit p und n bezeichnet.

Durch p und D' wird nun eine gerade Linie gelegt, ebenso durch n und D' ; die Punkte p und n , in welchen dieselben die durch o und O gelegte Gerade schneiden, sind zwei weitere Punkte der zu construierenden Ellipse.

Man übersieht leicht, dass das Verfahren, durch welches die Punkte p und n gefunden werden, mit dem übereinstimmt, welches zur Bestimmung von g und b in Anwendung gebracht worden war, dass es also auch in den gleichen Gründen seine Rechtfertigung findet.

Nach derselben Methode sind endlich auch die beiden Punkte r und q des Bildes bestimmt, und zwar sind in Fig. 3, Tab. VII die zur Auffindung dieser beiden Punkte nöthigen Hülfslinien gezogen.

Zu weiterer Erläuterung des eben besprochenen Verfahrens ist dasselbe in Fig. 3, Tab. VII zur Construction des perspectivischen Bildes eines zweiten vertikalen, auf der Bildfläche rechtwinkeligen Kreises angewendet worden, welcher dem ersten ganz gleich gerade hinter demselben steht (im Aufriss also von af gedeckt erscheint) und der so weit von der Bildfläche absteht, dass das Bild seines Mittelpunktes in v erscheint¹⁾.

Alle zur Auffindung der einzelnen Punkte dieses Kreisbildes nöthigen Hülfslinien sind in unserer Figur gezogen, so dass man den Gang der Construction in derselben vollständig verfolgen kann.

Um die durch Tab. VII erläuterten Constructionen recht verständlich zu machen, müssen dieselben im doppelten Maassstabe der Tab. VII ausgeführt werden.

Um die Construction des perspectivischen Bildes senkrechter auf der Bildfläche rechtwinkelig stehender Kreise einzuüben, construire man das Bild der quadratischen Tafel Fig. 3, III. Tab. VIII Tab. VIII, deren quadratische Flächen $afhc$ und $bgid$ rechtwinkelig auf der Bildfläche Fig. 3. stehen, und welche rechtwinkelig zu diesen beiden Flächen cylindrisch durchbohrt ist, wie es in unserer Figur durch punktirte Linien auf der Fläche $abdc$ im Aufriss und auf der Fläche $abgf$ im Grundriss angedeutet ist. Die punktirten Linien links von ac im Aufriss der Fig. 3 zeigen die Hälfte der quadratischen Fläche $afhc$ sammt der Hälfte des Kreises, welcher die Basis der cylindrischen Durchbohrung bildet, in ihrer wahren Gestalt.

Nach diesen Bemerkungen wird die Construction des perspectivischen Bildes der in Fig. 3, Tab. VIII im Grund- und Aufriss dargestellten cylindrisch durchbohrten quadratischen Platte für die auf Tab. VIII angegebene Lage des Augenpunktes und der beiden Distanzpunkte wohl keine Schwierigkeit mehr haben.

Wenn es sich darum handelt, das perspectivische Bild von Kreisen zu construiren, deren Lage keine der in den letzten Paragraphen besprochenen ist, so kommt man unter allen Umständen dadurch zum Ziel, dass man eine beliebige Anzahl von Punkten auf dem Umfang derselben im Grundriss sowohl wie im Aufriss bezeichnet, und das Bild dieser einzel-

¹⁾ In unserer Figur ist der Buchstaben v vergessen; dem aufmerksamen Leser wird es nicht schwer fallen, den Punkt aufzufinden, welcher hier gemeint ist.

nen Punkte auf die bekannte Weise ermittelt. In manchen speciellen Fällen lassen sich freilich Abkürzungen in Anwendung bringen, welche wir jedoch hier nicht weiter besprechen können.

29 **Uebungsbeispiele.** Zur Recapitulation der wichtigsten Regeln der Perspective wollen wir noch das Bild eines Bogenganges betrachten, dessen vorderer Theil auf Tab. IX im Grundriss, und auf Tab. X mit feinen Linien im Aufriss dargestellt ist. Die Lage der Bildfläche ist im Grundriss Tab. IX durch XY gegeben; auf Tab. X ist ferner die Horizontlinie gezogen, Augenpunkt und die Distanzpunkte sind hier markirt.

Nachdem man, wie es auf Tab. X ausgeführt worden ist, das perspectivische Bild der Basis der quadratischen Pfeiler I und II construirt hat, ergiebt sich das perspectivische Bild der Basis der Pfeiler III und IV auf folgende Weise:

Das Bild des Punktes f muss offenbar auf der Linie aO liegen. Da nun aber bdf ein Quadrat, also df eine Linie ist, welche mit der Bildfläche XY (Tab. IX) einen Winkel von 45° macht, so muss das Bild von f auch auf der von b (Tab. X) nach D gezogenen Linie liegen, oder mit anderen Worten, der Punkt f liegt auf der Durchschneidung der Linien aO und bD .

Hat man den Punkt f gefunden, so hat man durch ihn nur eine Horizontale bis zur Durchschneidung mit nO einerseits und mit cO andererseits zu ziehen, um das Bild k des Punktes k , und das Bild h des Punktes h zu finden.

Das Bild l des Punktes l liegt auf der Durchschneidung der Linie nO mit der durch b und D gelegten Geraden.

Ist einmal l gefunden, so ergeben sich die Punkte g und i des Bildes, wenn man durch l eine Horizontale bis zur Durchschneidung mit aO und cO zieht.

Gerade so, wie man von den Pfeilern I und II ausgehend das Bild der Basis der Pfeiler III und IV construirt hat, so kann man von diesen ausgehend das Bild der Basis der Pfeiler V und VI erhalten, welche ebenso weit hinter III und IV liegen, wie III und IV hinter I und II. Die Bilder der Basis von V und VI ergeben sich also, ohne dass es nöthig wäre, dieselben im Grundriss aufzutragen, wie denn auch der Grundriss auf Tab. IX nicht bis zu den Pfeilern V und VI fortgesetzt ist.

In gleicher Weise findet man auch das Bild der Basis eines weiteren Pfeilerpaares, welches wir denn als das hinterste des Bogenganges annehmen wollen.

Durch die Punkte a, b, f, g u. s. w. werden nun senkrechte Linien gezogen bis zur Durchschneidung mit der Linie po , und auf diese Weise werden die Punkte p, r, t u. s. w. des Bildes gefunden, in welchen die Bogen auf den quadratischen Pfeilern I, III u. s. w. aufgesetzt sind. In gleicher Weise ergeben sich auf der anderen Seite die Punkte q, s, u u. s. w.

Die halbkreisförmigen Bogen, welche die Pfeiler I und II, III und IV u. s. w. überspannen, sind der Bildfläche parallel, sie werden also auch im Bilde halbkreisförmig erscheinen. Das Gewölbe, welches den Zwischenraum zwischen den Pfeilern I und II überspannt, ist auf der Vorderseite durch einen Halbkreis pvg begränzt, dessen Mittelpunkt m ist.

Das Bild m dieses Mittelpunktes ist der Durchschnittspunkt der von m nach O gezogenen Linie mit der Horizontalen pq . Der um den Mittelpunkt m mit dem Radius mp über dem Durchmesser pq gezogene Halbkreis ist das Bild des Halbkreises pvg .

Der Halbkreis, welcher auf der hinteren Seite das auf die Pfeiler I und II ruhende Ge-

wölbe begränzt, hat im Bilde zum Centrum den Punkt m' , welcher auf dem Durchschnitt von mO und rs liegt, und den Radius $m's$.

In gleicher Weise ist auf Tab. X das Bild der Gewölbe construiert, welche den Zwischenraum der Pfeiler III und IV, V und VI, VII und VIII überspannen.

Die Bogen, welche den Zwischenraum zwischen den Pfeilern I und III, III und V u. s. w. einerseits, II und IV, IV und VI u. s. w. andererseits überspannen, sind durch Halbkreise begränzt, welche rechtwinkelig auf der Bildfläche stehen, deren perspectivisches Bild also nach den Regeln des §. 28 zu construiren ist. Diese Bogen erscheinen in unserem Bilde zu einem grossen Theile verdeckt.

Um auch hier Gelegenheit zur Construction des perspectivischen Bildes horizontaler Kreise (siehe §. 27) zu geben, sei auf dem Boden des Ganges in dem Raum zwischen den Pfeilern I, II, IV und III aufgezeichnet, wie man auf Tab. IX sieht. Ein ganz gleicher Kreis befinde sich ferner in der zweiten und dritten Abtheilung unseres Bogenganges. Auf Tab. X sieht man auch das perspectivische Bild dieser drei horizontalen Kreise.

Zu fernerer Uebung construiren der Schüler das perspectivische Bild desselben Bogenganges für den Fall, dass der Augenpunkt in O' Tab. X liegt, während der Distanzpunkt D' an derselben Stelle bleibt, wie er auf Tab. X angegeben ist. Für diesen Fall liegt natürlich der andere Distanzpunkt D um die Länge $O'D'$ links von O' .

Zur Recapitulation dessen, was in §. 24 über die Anwendung der Accidentalpunkte gesagt worden ist, wende man den Grundriss des Monumentes Fig. 2 der Tab. IV aus seiner dortigen Lage um 30° , wobei seine vertikale Mittelaxe als Umdrehungsaxe dienen mag, construiren dazu den neuen Aufriss und endlich für diese veränderte Stellung des Monumentes gegen die Bildfläche das perspectivische Bild desselben, wobei der Augenpunkt dieselbe Stellung beibehalten mag, wie auf Tab. IV, während der Abstand der Distanzpunkte vom Augenpunkt um 1 Zoll grösser zu nehmen ist, als auf Tab. IV.

Die in den vorhergehenden Blättern entwickelten und erläuterten Grundsätze und Regeln genügen nun, um das perspectivische Bild eines jeden Gegenstandes zu construiren, welcher im Grund- und Aufriss gegeben ist. Um einige Gewandtheit in der Construction perspectivischer Bilder zu erlangen, sind freilich die in dem Obigen gegebenen Beispiele und Aufgaben nicht genügend, man muss zu diesem Zweck die gegebenen Regeln noch auf weitere Beispiele anwenden, zu welchen Gebäude aller Art, Möbel, physikalische Apparate, Modelle u. s. w., namentlich aber auch die Mappe des Architekten, des Mechanikers u. s. w. Material genug liefern.

In einzelnen Fällen lassen sich freilich noch manche Abkürzungsmethoden in Anwendung bringen, welche wir aber hier nicht weiter besprechen wollen, weil eine zu grosse Anhäufung von Specialitäten den Anfänger verwirren würde, während andererseits der Geübtere bei einigem Nachdenken solche Abkürzungen selbst aufzufinden im Stande ist.

The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the origin of life. It is shown that the problem is one of the most important and interesting in the history of science. The author discusses the various theories of the origin of life, and shows that the most probable one is the theory of spontaneous generation. He then discusses the evidence in favor of this theory, and shows that it is supported by the facts of the case. The second part of the paper is devoted to a discussion of the problem of the evolution of life. It is shown that the problem is one of the most important and interesting in the history of science. The author discusses the various theories of the evolution of life, and shows that the most probable one is the theory of natural selection. He then discusses the evidence in favor of this theory, and shows that it is supported by the facts of the case. The third part of the paper is devoted to a discussion of the problem of the development of life. It is shown that the problem is one of the most important and interesting in the history of science. The author discusses the various theories of the development of life, and shows that the most probable one is the theory of the development of life. He then discusses the evidence in favor of this theory, and shows that it is supported by the facts of the case.

VIERTES BUCH.

SCHATTENLEHRE.

Einleitung. An den Gegenständen unserer Umgebung, welche wir durch den Gesichtssinn wahrnehmen, erscheinen uns die Umrisse nicht etwa als selbstständige Linien, sondern sie werden uns nur durch den Contrast ihrer Erleuchtung und Färbung gegen die benachbarten Objecte und namentlich gegen den Hintergrund sichtbar, auf welchen wir sie projecirt sehen. Selbst die Kanten ebenflächig begränzter Körper erscheinen uns nur als die Gränze benachbarter ungleich stark erleuchteter Flächen. Ganz besonders aber heben sich die Körper von ihrer Umgebung durch den Schatten ab, welchen sie werfen. 30

Es ist demnach klar, dass die blosse Contourzeichnung eines Gegenstandes, sei es nun Grund- und Aufriss, sei es eine parallel-perspectivische oder eine malerisch-perspectivische Zeichnung, keine so lebendige Anschauung geben kann, als wenn man durch passende Schattirung die Beleuchtungsverhältnisse des Objectes wiederzugeben sucht.

Beim Freihandzeichnen ahmt man die Licht- und Schattenverhältnisse nach, wie man sie an den Gegenständen der Natur beobachtet, bei constructiven Zeichnungen dagegen, für welche uns in den meisten Fällen gar kein Original vorliegt, werden auch die Schatten der Körper, wenn sie überhaupt dargestellt werden sollen, construirt.

Um eine Schattenconstruction auszuführen muss man eine bestimmt definirte Erleuchtungsquelle zu Grunde legen. Als solche nimmt man nun entweder eine Kerzen- oder Lampenflamme an, oder man denkt sich den darzustellenden Gegenstand durch Sonnenstrahlen erleuchtet. Wenn Körper nur von diffusem Tageslichte beschienen sind, wie dies z. B. im Freien bei bewölktem Himmel stattfindet, kommen scharf begränzte Schatten gar nicht vor, es kann also für diesen Fall auch von einer Schattenconstruction keine Rede sein.

Die von einer Flamme ausgesendeten Strahlen divergiren von derselben nach allen Seiten hin; wenn man also diesen Strahlen irgend einen undurchsichtigen Körper aussetzt, so wird der hinter demselben befindliche Schattenraum (d. h. der Raum, von welchem der undurchsichtige Körper die Strahlen der Flamme abhält) ein abgestumpfter Kegel sein (vorausgesetzt, dass der Körper weit genug von der Flamme entfernt ist, um dieselbe ohne merklichen Fehler als leuchtenden Punkt betrachten zu können), dessen Mantelfläche durch diejenigen vom leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen gebildet wird, welche den Schatten gebenden Körper tangiren.

Je weiter die Lichtquelle vom Schatten werfenden Körper entfernt ist, desto weniger divergirend sind die Strahlen, welche die Mantelfläche des Schattenkegels bilden. Bei sehr grosser (gewissermaassen unendlich grosser) Entfernung der Lichtquelle sind alle von ihr auf den Körper fallenden Strahlen einander parallel.

So sind alle von der Sonne (wenn man sie, wie bei Schattenconstructionen immer geschieht, nur als einen leuchtenden Punkt, nicht als eine leuchtende Scheibe von namhaftem Durchmesser betrachtet) auf irgend einen Gegenstand der Erdoberfläche fallenden Strahlen einander parallel, der Schattenraum, welcher sich hinter dem von den Sonnenstrahlen beschienenen Körper befindet, ist also ein Cylinder, dessen Mantelfläche durch diejenigen Sonnenstrahlen gebildet wird, welche den Schatten gebenden Körper tangiren.

Für die Beleuchtung durch die einander parallelen Sonnenstrahlen ist die Ausführung der Schattenconstruction ungleich einfacher, als für den Fall, dass die Beleuchtung von einer Kerzen- oder Lampenflamme ausgeht. In den meisten Fällen wird deshalb bei Schattenconstructionen Sonnenbeleuchtung vorausgesetzt, und auf diese wollen wir auch unsere Besprechung in den folgenden Blättern beschränken.

Wenn irgend eine undurchsichtige Fläche, sei es nun eine ebene oder eine gekrümmte, den Schattencylinder eines Körpers durchschneidet, so wird der Theil der Fläche, welcher innerhalb des Schattencylinders liegt, dunkel sein, während der übrige Theil derselben von den Sonnenstrahlen erleuchtet ist. Dieser unerleuchtete Theil einer Fläche, von welchem durch irgend einen zwischen ihr und der Sonne befindlichen Körper die Sonnenstrahlen abgehalten werden, wird der Schlagschatten dieses Körpers genannt.

So wirft ein Baum seinen Schlagschatten auf den ihn umgebenden Boden; ein hervorragendes Dachsimis wirft seinen Schlagschatten auf die verticale Wand des Hauses u. s. w.

Wenn ausser der Sonne, dem Schatten werfenden Körper und der Fläche, welche den Schatten auffängt, weiter gar keine Objecte vorhanden wären, so müsste der Schlagschatten absolut schwarz sein. Nun aber giebt es ringsum Gegenstände, welche gleichfalls von der Sonne erleuchtet das empfangene Licht reflectiren oder es unregelmässig nach allen Seiten zerstreuen, wie ja auch namentlich alle Punkte des Himmelsgewölbes, sei es nun bewölkt oder wolkenfrei, bei Tage eine nicht unbedeutende Lichtmenge aussenden. So kommt es denn, dass die Schlagschatten, wenn auch bedeutend dunkler als die von den Sonnenstrahlen unmittelbar getroffene Umgebung, doch nie ganz schwarz erscheinen.

31 Construction der Schlagschatten. Den Schlagschatten eines gegebenen Körpers construiren heisst die Durchschnittscurve der Mantelfläche seines Schattencylinders mit der den Schatten auffangenden Fläche durch Construction bestimmen.

Um diese Durchschnittscurve zu erhalten, muss man eine Reihe einzelner Punkte derselben ermitteln und über diese dann die verlangte Curve ziehen. Der Ausgangspunkt aller Schattenconstructionen besteht also darin, den Schlagschatten eines undurchsichtigen Punktes zu finden. Derselbe ergiebt sich, wenn man parallel mit der gegebenen Strahlenrichtung eine gerade Linie durch den Schatten werfenden Punkt legt und den Punkt bestimmt, in welchem diese Gerade die den Schatten auffangende Fläche trifft.

Um eine Schattenconstruction auszuführen, muss vor allen Dingen die Richtung der Sonnenstrahlen in Beziehung auf den Schatten werfenden Körper festgestellt werden; wenn es sich also um die Construction der Schatten im Grund- und Aufriss handelt, so ist die

Horizontal- und Verticalprojection eines Sonnenstrahls anzugeben, mit welchem dann die übrigen parallel laufen.

Auf Tab. I ist in Fig. 1 Grund- und Aufriss einer quadratischen Pyramide gegeben IV. Tab. I und es soll deren Schlagschatten auf den horizontalen Boden construirt werden. — Die Richtung der Sonnenstrahlen soll eine solche sein, dass ihre Horizontalprojection parallel mit rr' im Grundriss, ihre Verticalprojection aber parallel mit rr' im Aufriss ist ¹⁾. Fig. 1.

Die Lösung dieser Aufgabe ist eine sehr einfache, denn sie reducirt sich darauf, den Schatten der Pyramidenspitze S auf die Grundfläche zu bestimmen. Dies geschieht nun, wie bereits oben angedeutet wurde, dadurch, dass man durch den Punkt S eine gerade Linie parallel mit der gegebenen Richtung der Sonnenstrahlen legt und den Punkt ermittelt, in welchem diese Gerade die Grundfläche trifft.

Zieht man in Grund- und Aufriss durch die Pyramidenspitze S eine Gerade parallel mit rr' , so sind die so erhaltenen Linien Sn die Horizontal- und die Vertikalprojection des Sonnenstrahls, welcher die Pyramidenspitze streift.

Den Punkt s , in welchem dieser die Spitze S streifende Sonnenstrahl die Grundfläche trifft, findet man im Aufriss, wenn man die Linie Sn bis zur Durchschneidung mit der Grundlinie verlängert. Ist der Punkt s im Aufriss bestimmt, so ergiebt sich die Lage von s im Grundriss als der Durchschnittspunkt von Sn des Grundrisses mit einer durch s des Aufrisses rechtwinkelig zur Grundlinie gezogenen Geraden.

Der so im Grund- und Aufriss bestimmte Punkt s ist der Schlagschatten der Pyramidenspitze S auf die Grundfläche.

Der Schlagschatten einer geraden Linie auf einer Ebene ist nothwendig wieder eine gerade Linie, welche bestimmt ist, wenn man ihre Endpunkte bestimmt hat.

So ist auch der Schatten der Pyramidenkante BS auf die Grundfläche eine gerade Linie. Es ist s der eine Endpunkt derselben, B der andere; denn der Punkt B auf der Grundfläche selbst stehend fällt mit seinem Schatten zusammen. Bs ist also der Schatten der Kante BS , sowie As der Schatten der Kante AS ist.

AsB ist der Schlagschatten, welchen die Pyramide auf die Grundfläche wirft.

Gehen wir nun zur Construction des Pyramidenschattens auf eine vertikale, mit der Bildfläche parallele Ebene über.

Die Pyramide in Fig. 2, Tab. I ist von gleicher Form und Stellung wie die in Fig. 1 IV. Tab. I betrachtete; hinter derselben aber ist eine vertikale mit der Bildfläche parallele Wand $MPQN$ aufgestellt, welche einen Theil des Pyramidenschattens auffängt. Fig. 2.

Die Richtung der Sonnenstrahlen soll für Fig. 2 dieselbe sein, wie für Fig. 1. Es ist also Ss des Aufrisses die Vertikalprojection, Ss des Grundrisses ist die Horizontalprojection des die Pyramidenspitze streifenden Sonnenstrahls. Derselbe trifft die vertikale Wand $MPQN$ in einem Punkte s' , welcher sich zunächst im Grundriss als Durchschnittspunkt der Geraden MP mit Ss ergiebt.

¹⁾ Die Richtung der Sonnenstrahlen kann man in jedem einzelnen Fall ganz nach Belieben wählen; wo aber nicht ein besonderer Grund eine andere Richtung zweckmässig macht, wählt man sie gewöhnlich so, dass die Horizontalprojection der Sonnenstrahlen sowohl wie die Vertikalprojection derselben einen Winkel von 45° mit der Grundlinie macht. In der That ist diese Richtung der Sonnenstrahlen auf Tab. III, Tab. V und allen folgenden vorausgesetzt, während für die Tafeln I, II und IV eine etwas andere Richtung der Sonnenstrahlen gewählt worden ist.

Zieht man durch s' des Grundrisses eine Vertikale bis zur Durchschneidung mit Ss des Aufrisses, so erhält man den Punkt s' im Aufriss. s' ist aber der Schatten der Pyramiden- spitze auf der vertikalen Wand MN .

Von dem Schatten BsA der Pyramide auf die Grundfläche kommt in diesem Fall nur ein Theil zu Stande, nämlich derjenige, welcher im Grundriss vor MP liegt.

Der Schatten der Kante BS trifft die Basis QN der Ebene $MPNQ$ in c , der Schatten der Kante AS trifft sie in d . Im Grundriss ergeben sich die Punkte c und d als Durch- schnittspunkte von Bs und As mit QN . Im Aufriss erhält man die Punkte c und d , wenn man von c und d des Grundrisses Vertikale bis zur Durchschneidung mit der Grundlinie zieht.

Zieht man durch c des Aufrisses eine Linie parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen bis zur Durchschneidung mit der Kante BS , so erhält man im Aufriss den Punkt C der Kante BS , dessen Schatten auf die Linie QN fällt, in welcher die vertikale Ebene $MPNQ$ mit der Grundfläche zusammentrifft.

Der untere Theil BC der Kante BS wirft nun seinen Schatten Bc auf die Grundfläche, während der Schatten cs' des oberen Theils CS dieser Kante auf die vertikale Fläche $MPNQ$ fällt.

Ebenso wirft die Kante AS einen Theil ihres Schattens, nämlich Ad , auf die Grund- fläche, während der Schatten ds' des oberen Theils dieser Kante gleichfalls auf die vertikale Fläche $MPNQ$ fällt.

Ein Theil des Pyramidenschattens, nämlich $AdcB$, fällt also auf die Grundfläche, wäh- rend der obere Theil der Pyramide seinen Schatten $ds'c$ auf die vertikale Wand $MPNQ$ wirft.

IV. Tab. II
Fig. 3.

Ganz auf dieselbe Weise ist in Fig. 3, Tab. II der Schatten der quadratischen Pyramide auf die vertikale, aber nicht mit der Senkfläche parallele Wand $MPNQ$ construirt.

In Fig. 1 und 2, Tab. I, sowie auch in Fig. 3, Tab. II und den folgenden sind ausser den Contouren der darzustellenden Körper auch noch die Schattengränzen (As und Bs in Fig. 1, Ad , Bc , ds' und cs' in Fig. 2 u. s. w.), sowie die zur Ausführung der Construc- tion nöthigen Linien (Ss in Fig. 1 und 2, dd , $s's'$, ds , cs u. s. w. in Fig. 2 theils ausgezogen, theils punktirt. Es war dies hier der Erläuterung wegen nöthig. Wenn es sich aber nicht um eine Demonstrationsfigur, sondern um die Herstellung einer ausge- führten Zeichnung handelt, so werden alle Constructionslinien und die Gränzlinien der Schlagschatten nur mit Bleistift gezogen. Vor dem Tuschen werden dann die Construc- tionslinien möglichst vollständig, die Gränzlinien der Schlagschatten aber nur so weit aus- gewischt, dass sie der Zeichner zwar noch erkennen kann, dass sie aber in der ausgeführten Zeichnung nicht mehr störend auftreten.

Was hier von den geradlinigen Hülfslinien gesagt ist, gilt ebenso von den krummlinigen Constructionscurven späterer Figuren, z. B. von den elliptischen Bogen $vs'xy$, tcz u. s. w. der Fig. 9 auf Tab. IV, von der Ellipse $ABCD$ im Aufriss der Fig. 15, Tab. VII, von den Ellip- sen 1 und 2 im Aufriss der Fig. 16, Tab. VII u. s. w. Sie werden nur mit Bleistift gezogen und nachdem man sie zur Auffindung der nöthigen Punkte der Schattengränze benutzt hat, vor dem Austuschen wieder ausgewischt.

IV. Tab. II
Fig. 4.

In Fig. 4, Tab. II ist der Langwürfel, dessen vordere vertikale Wand den Schatten der Pyramide theilweise auffängt, nicht so hoch, dass der Schatten der Spitze noch auf diese vordere Wand $MPNQ$ fiele, er fällt vielmehr auf die obere horizontale Fläche $MPOV$.

Um die Schattenconstruction für diesen Fall auszuführen, bestimmt man den Punkt s' , auf welchen der Schatten der Pyramidenspitze fallen würde, wenn die vertikale Wand $MPNQ$ hinlänglich nach oben verlängert wäre, also nach dem in Fig. 3 erläuterten Verfahren. Zieht man alsdann die Linien cs' und ds' , so erhält man die Punkte e und f , in welchen die Schatten der Pyramidenkanten BS und AS die Kante MP des den Schatten auffangenden Langwürfels treffen. Die Punkte e und f sind leicht in Grundriss zu bringen.

Der Punkt s'' der oberen Fläche des Langwürfels, auf welchen der Schatten der Pyramidenspitze fällt, ergiebt sich im Aufriss als Durchschnitt der Linie Ss mit MP . Um denselben im Grundriss zu erhalten, zieht man durch s'' des Aufrisses eine Linie rechtwinklig zur Grundlinie bis zur Durchschneidung mit Ss des Grundrisses. Nachdem man so s'' in Grundriss gebracht hat, hat man in demselben noch die Linien fs'' und es'' zu ziehen, um die Grenzen des Schattens zu erhalten, welchen der obere Theil der Pyramide auf die horizontale Ebene $MPOV$ wirft.

Die Construction der Schlagschatten, welche die Langwürfel in Fig. 3 u. 4 werfen, kann ganz nach den eben erläuterten Grundsätzen ausgeführt werden. Ausführlicher jedoch soll die Construction der Schatten solcher Körper, welche durch horizontale und vertikale Ebenen begrenzt sind, noch im folgenden Paragraphen besprochen werden.

Die Schatten horizontaler und vertikaler Linien auf horizontalen und vertikalen Ebenen. Da wir im vorigen Paragraphen gelernt haben, den Schatten jedes Punktes auf einer horizontalen oder vertikalen Ebene zu finden, so ist damit auch die Construction des Schattens gerader Linien gegeben, da es sich ja nur um die Construction des Schattens ihrer Endpunkte handelt. Die Ausführung der im Vorigen besprochenen Methode führt uns aber zu Resultaten, welche wir näher betrachten müssen.

In Fig. 5, Tab. III sei $ABCDEFGH$ ein Langwürfel, dessen Kanten sämtlich horizontal oder vertikal stehen und dessen Schlagschatten auf der Grundfläche gesucht werden soll. IV. Tab. III
Fig. 5.

Um zunächst den Schatten der vertikalen Kante AB zu bestimmen, suchen wir den Schatten des oberen Endpunktes A derselben ganz in derselben Weise, nach welcher im vorigen Paragraphen der Schatten der Pyramidenspitze S auf der Grundfläche gesucht wurde. Es wird nämlich durch A des Aufrisses eine gerade Linie gelegt, parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen und der Punkt a bestimmt, in welchem dieselbe die Grundlinie schneidet. — Alsdann wird durch A des Grundrisses eine Gerade parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen gezogen. Der Durchschnittspunkt derselben mit einer durch a des Aufrisses rechtwinklig zur Grundlinie gelegten Geraden ist im Grundriss der gesuchte Schatten a des Punktes A auf die Grundfläche.

Den Schatten der vertikalen Kante AB im Grundriss erhält man, wenn man von B , dem unteren Endpunkte der Kante, eine Gerade nach a zieht. Da nun aber im Grundriss der Punkt B mit A zusammenfällt, so fällt auch der Schatten Ba der Vertikalen BA im Grundriss mit Aa zusammen, oder mit anderen Worten: der Schatten einer vertikalen Linie auf die Grundfläche (oder auf eine andere horizontale Ebene) fällt in die Richtung der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen.

Um den Schatten der vertikalen Kanten FE und DC zu erhalten, hat man also im

Grundriss gleichfalls nur durch die Punkte E und C in der Richtung der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen Gerade zu ziehen. Da nun aber die gleich langen Kanten BA , DE und FE auf die Grundfläche auch gleich lange Schatten werfen müssen, so hat man nur Ee und Cc gleich Aa zu machen, um die Schatten e und c der Punkte E und C zu finden.

Da nun aber Cc gleich und parallel ist mit Aa , so muss auch ac gleich und parallel sein mit AC . Ebenso ist ec gleich und parallel mit EC .

AC und EC sind aber horizontale Linien, wir können also das eben gewonnene Resultat auch so ausdrücken:

Der Schatten, welchen eine horizontale gerade Linie auf die Grundfläche (oder auf irgend eine andere horizontale Ebene) wirft, ist ihr selbst parallel und an Länge gleich.

IV. Tab. III
Fig. 6.

Fig. 6, Tab. III zeigt Grund- und Aufriss einer quadratischen Säule von gleicher Basis, aber grösserer Höhe, wie die in Fig. 5, dargestellte und zwar ist sie weiter zurückgerückt, damit ihr Schatten noch theilweise auf die (vertikale) Senkfläche fällt.

Den Schatten a' des Eckpunktes A findet man nach dem im vorigen Paragraph besprochenen Verfahren, also ganz auf dieselbe Weise, wie den Punkt s' in Fig. 2, Tab. I, indem man durch A des Grundrisses eine Linie An parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen bis zur Durchschneidung mit der Grundlinie, und dann im Aufriss durch n eine Vertikale bis zur Durchschneidung mit derjenigen Linie zieht, welche man durch A des Aufrisses parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen gezogen hat.

Zieht man im Aufriss durch n eine Linie parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen, so schneidet dieselbe die Kante AB in N . N ist also derjenige Punkt der Kante AB , welcher seinen Schatten auf den Punkt n der Grundlinie wirft; na' ist mithin auch der Schatten des vertikalen Kantenstücks NA auf die Senkfläche.

Da nun aber na' eine vertikale Linie ist, so folgt, dass der Schatten einer vertikalen Linie auf die Senkfläche (und überhaupt auf jede senkrechte Ebene) gleichfalls eine vertikale Linie ist.

Da ferner Nn parallel mit Aa' und NA parallel mit na' , so ist auch na' gleich NA ; oder allgemein: der Schatten, welchen eine vertikale Linie auf eine vertikale Ebene wirft, ist der Länge nach ihr selbst gleich.

IV. Tab. III
Fig. 7.

Fig. 7 auf Tab. III stellt Grund- und Aufriss einer quadratischen Säule dar, auf welcher eine achteckige Platte liegt. Es ist nun der Schlagschatten zu construiren, welchen die Platte auf die vertikalen Wände der Säule wirft, und ferner der Schatten, welcher von beiden auf die Grund- und auf die Senkfläche fällt.

Der Schatten a des Ecks A und der Schatten b des Ecks B auf die Säulenfläche $DEGF$ wird ganz nach dem Verfahren gefunden, nach welchem in Fig. 3, Tab. II der Schatten s' des Punktes S auf die vertikale Fläche $MPNQ$ bestimmt wurde.

Die horizontale Kante BC der achteckigen Platte wirft ihren Schatten theils auf die Fläche $DEGF$, theils auf die Fläche $FGJH$. Um den Punkt zu finden, in welchem der Schatten der horizontalen Kante BC die vertikale Säulenkannte FG trifft, verfährt man in folgender Weise. Man zieht durch F des Grundrisses (der Punkt, zu welchem die Kante FG im Grundriss verkürzt erscheint) eine Linie parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen und findet so im Grundriss den Punkt N der Kante BC , dessen Schatten auf

die Kante FG fällt. Den Punkt N bringt man nun in Aufriss und zieht durch N des Aufrisses eine Linie parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen. Wo diese die Kante FG trifft, ist der gesuchte Schatten n des Punktes N .

Eine von b nach n gezogene Gerade ist der Schatten des Kantenstücks BN auf die Fläche $DEGF$.

In gleicher Weise wird der Punkt P der Kante BC bestimmt, dessen Schatten p auf die Kante HJ fällt. Eine von p nach n gezogene Linie ist der Schatten, welchen das Kantenstück NP auf die Säulenfläche $FGHJ$ wirft.

Auf die Säulenfläche $DEGF$ fällt auch noch ein Theil des Schattens der horizontalen Kante AO . Wie er gefunden wird, bedarf wohl jetzt keiner Erläuterung mehr.

Die Construction des Schattens, welchen die Säule sammt der Platte auf die Grund- und auf die Senkfläche werfen, kann nach den bisherigen Besprechungen ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. In unserer Figur erscheint dieser Schatten auf der rechten Seite durch die Gränzlinie der Tafel abgeschnitten. Der Schüler führe diese Construction auf einem hinlänglich ausgedehnten Papierblatte vollständig aus.

Schatten auf schrägen Ebenen und gekrümmten Flächen. Wir haben uns 33
bisher darauf beschränkt, solche Schatten zu construiren, welche auf horizontale oder vertikale Ebenen fallen, man braucht aber nur das bisher angewandte Verfahren etwas allgemeiner zu formuliren, um eine Regel zu erhalten, nach welcher sich der Schatten eines gegebenen Punktes auf Flächen jeder Art, also auch auf schräg liegenden Ebenen und gekrümmten Flächen bestimmen lässt. Diese Regel heisst:

Man lege durch den gegebenen, Schatten werfenden Punkt S eine gerade Linie in der Richtung der Sonnenstrahlen, lege dann durch diese Gerade eine vertikale Ebene und construire die Curve, in welcher diese vertikale Ebene die den Schatten auffangende Oberfläche schneidet. Da wo diese Durchschnittscurve von der Geraden getroffen wird, welche man in der Richtung der Sonnenstrahlen durch den Punkt S gelegt hat, ist der gesuchte Schatten des Punktes S .

Wir wollen dies durch einige Beispiele erläutern.

Eine Pyramide, gleich derjenigen in Fig. 1 und 2 auf Tab. I, wirft ihren Schatten zum Theil auf die schräge Ebene $CDEF$, Fig. 8 Tab. IV; man soll den Schatten s' der Pyramidenspitze S auf dieser Ebene bestimmen. IV. Tab. IV
Fig. 8.

Ss im Aufriss ist die Vertikalprojection der durch die Pyramidenspitze S in der Richtung der Sonnenstrahlen gelegten Geraden. Eine durch dieselbe gelegte Vertikalebene erscheint im Grundriss zur Linie Ss verkürzt.

Die Durchschnittscurve dieser vertikalen mit der schrägen Ebene $CDEF$ ist eine gerade Linie, welche man dadurch erhält, dass man ihre Endpunkte m und n ermittelt.

Der Punkt m ist der Durchschnittspunkt der besprochenen Vertikalebene mit der Kante CD ; man erhält ihn im Grundriss als Durchschnittspunkt der Geraden Ss und CD . Ist die Lage des Punktes m im Grundriss bestimmt, so kann er leicht in Aufriss gebracht werden.

In gleicher Weise, wie der Punkt m wird auch n , d. h. derjenige Punkt im Grund- und Aufriss bestimmt, in welchem die durch Ss gelegte Vertikalebene die Kante FE schneidet.

Im Aufriss werden nun die Punkte m und n durch eine Gerade verbunden. Der Punkt s' , in welchem dieselbe von Ss durchschnitten wird, ist der gesuchte Schatten des Punktes S auf die schräge Ebene $CDEF$.

Die Schatten, welche die Pyramidenkanten BS und AS auf die Grundfläche werfen, treffen in r und t die Kante FE ; um die Grenzen des Schattens zu erhalten, welchen der obere Theil der Pyramide auf die schräge Ebene $CDEF$ wirft, hat man demnach im Grund- und Aufriss nur noch die Linien rs' und ts' zu ziehen.

IV. Tab. IV
Fig. 9. In Fig. 9, Tab. IV ist der Schatten derselben Pyramide auf einen auf dem Boden liegenden Cylinder construirt, und zwar gleichfalls nach dem zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Grundsatz.

Eine vertikale Ebene, welche durch den die Spitze S der Pyramide streifenden Sonnenstrahl Ss gelegt ist, schneidet den Cylinder in einer Ellipse vxy , welche im Grundriss zur Linie verkürzt erscheint und welche im Aufriss nach den im 1. Theile dieses Werks erläuterten Principien auch leicht in Aufriss zu bringen ist. Der Punkt s' , in welchem diese Ellipse durch die Gerade Ss geschnitten wird, ist der Schatten, welchen die Pyramiden- spitze S auf die Oberfläche des Cylinders wirft.

Der Schatten der Pyramidenkante BS auf der Cylinderoberfläche ist nun aber keine gerade, sondern eine krumme Linie, welche man dadurch erhält, dass man eine genügende Anzahl einzelner Punkte derselben ganz in derselben Weise, wie den Punkt s' bestimmt, d. h. man bestimmt den Schatten, welchen einzelne Punkte der Kante BS auf die Cylinder- oberfläche werfen.

Wird durch den den Punkt C der Pyramidenkante streifenden Sonnenstrahl eine Verticalebene gelegt, so schneidet dieselbe den Cylinder in einer Ellipse, welche der Ellipse vxy gleich und parallel ist. Hat man also nur einen Punkt z derselben durch die bekannte Construction ermittelt, so kann man durch denselben leicht die zweite Ellipse parallel mit der ersten vxy legen (1. Theil, §. 30 Seite 41). Es ist übrigens nicht nöthig, die ganze Ellipse zu ziehen, es genügt ein kleiner Theil zt derselben.

Der Schatten c des Punktes C ist der Durchschnittspunkt der Ellipse zt mit dem in C tangirenden Sonnenstrahl.

In gleicher Weise wird der Schatten d und e der Punkte D und E bestimmt.

Diese vier Punkte genügen, um den Schatten $s'cde$ der Kante BS in Grund- und Aufriss zu ziehen.

Nach dem gleichen Verfahren wird auch der Schatten der Kante AS gefunden.

34 **Beispiele.** Wenden wir nun die bisher besprochenen Regeln zur Schattenconstruction auf einige häufig vorkommende Körperformen an.

IV. Tab. V
Fig. 10. Fig. 10 auf Tab. V stellt Grund- und Aufriss einer vertikalen cylindrischen Säule dar, auf welcher eine kreisförmige Platte liegt, deren Durchmesser etwas grösser ist als der der Säule. Es soll zunächst der Schatten construirt werden, welchen die Platte auf die Säule und alsdann der Schatten, welchen Säule und Platte auf die Grundfläche werfen.

Der Schlagschatten, welchen die Platte (welche nichts anderes ist als ein vertikaler Cylinder von kreisförmiger Basis, dessen Höhe nur gering ist im Vergleich zu seinem Durchmesser) auf die Säule wirft, wird ganz nach den an Fig. 7, Tab. III erläuterten Principien construirt.

Diejenige Vertikale tz , welche im Aufriss Fig. 10 die Gränze des Cylinders auf der

linken Seite bildet, wird von dem Schatten der unteren kreisförmigen Kante der Platte in einem Punkte a getroffen, den man in folgender Weise findet: Im Grundriss erscheint die Vertikale zu einem Punkte verkürzt, welcher in unserer Figur der Kürze halber nur mit a bezeichnet ist. Durch diesen Punkt a des Grundrisses zieht man eine Gerade parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen; da wo diese Gerade den Kreis schneidet, zu welchem im Grundriss die Mantelfläche der Platte verkürzt erscheint, ist die Horizontalprojection A des Punktes A , welcher seinen Schatten gerade auf die Vertikale tz wirft. Nachdem man den Punkt A in Aufriss gebracht hat, zieht man durch A des Aufrisses eine Gerade parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen, und diese trifft die Vertikale tz in einem Punkte a , welcher der gesuchte Schatten des Punktes A ist.

Zieht man im Grundriss parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen zwei Tangenten an den Kreis, welcher die Horizontalprojection der Säule ist, so berührt die eine denselben in einem Punkte, den wir mit c bezeichnet haben. Dieser Punkt ist die Horizontalprojection der Vertikalen xy , in welcher die Säule auf ihrer Vorderseite von den Sonnenstrahlen gestreift wird und des auf xy liegenden Punktes c , auf welchen der Schatten des unteren Randes der Platte fällt. Nachdem c im Grundriss bestimmt worden ist, wird der Punkt C , dessen Schatten c ist, sowie die Lage von c im Aufriss ganz in derselben Weise ermittelt, wie die Punkte a und A .

Bestimmt man an dem unteren Rande der Platte einen beliebigen Punkt B , welcher zwischen A und C liegt, so kann man den Schatten b , welchen B auf die Säule wirft, ganz in derselben Weise finden, wie in Fig. 7, Tab. III der Schatten b des Punktes B gefunden worden war; d. h. man zieht durch B des Grundrisses eine Linie parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen, welche den inneren Kreis in b schneidet. Nachdem man nun B in Aufriss gebracht hat, ergibt sich b im Aufriss als Schnittpunkt einer durch b des Grundrisses gelegten Vertikalen mit einer Geraden, welche durch B des Aufrisses parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen zu ziehen ist.

Eine im Aufriss über die Punkte a , b und c gelegte Curve ist die Gränze des Schattens, welchen die Platte auf die Säule wirft.

Der Schlagschatten der Platte auf die Grundfläche ergibt sich am einfachsten in folgender Weise: Die obere Fläche der Platte ist ein horizontaler Kreis, dessen Ebene also der Grundfläche parallel ist; der Schatten, welchen dieser Kreis auf die Grundfläche wirft, ist demnach gleichfalls ein Kreis und zwar ein solcher, welcher dem Schatten werfenden vollkommen gleich ist. Man hat demnach nur den Schatten m zu suchen, welchen der Kreismittelpunkt M auf die Grundfläche wirft (und zwar ganz auf dieselbe Weise wie der Schatten s des Punktes S in Fig. 1, Tab. I bestimmt wurde), und um m einen Kreis zu ziehen, dessen Radius dem Halbmesser der Platte gleich ist.

Auf dieselbe Weise wird der Schatten der unteren Fläche der Platte construirt, welcher ein um m' mit dem gleichen Radius beschriebener Kreis ist.

Zwei Gerade fg und hi , welche parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen gemeinschaftliche Tangenten der beiden Kreise sind, bilden auf beiden Seiten die Gränze des Schattens, welchen die Mantelfläche der Platte auf die Grundfläche wirft.

Die seitliche Gränze des Schattens, welchen die Säule auf die Grundfläche wirft, wird durch die Tangenten gebildet, welche man in der Richtung der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen in den Punkten c und d des Grundrisses an den inneren Kreis zu ziehen hat.

IV. Tab. V
Fig. 11.

Auf einer vertikalen sechsseitigen Säule Fig. 11, Tab. V liegt ein vertikaler Cylinder von geringer Höhe, dessen kreisförmige Basis einen grösseren Durchmesser hat als die sechsseitige Säule. Die Construction des Schattens, welchen diese cylindrische Platte auf die Säule wirft, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung, zumal da die beigesetzten Buchstaben keinen Zweifel über den Gang derselben lassen.

Die in Fig. 11 dargestellte sechsseitige Säule ist der Senkfläche so nahe gerückt, dass der Schatten der kreisförmigen Platte, welche auf ihr liegt, noch ganz auf dieselbe (die Senkfläche nemlich) fällt. Um nun den fraglichen Schlagschatten der Platte zu erhalten, hat man zunächst nach der in §. 32 besprochenen, und durch Fig. 6, Tab. III erläuterten Methode den Schatten zu ermitteln, welchen einzelne Punkte des oberen Plattenrandes werfen. Dieser obere Plattenrand erscheint im Grundriss als Kreis, welcher von einer parallel der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen gezogenen Geraden im Punkte F berührt wird. Nachdem man diesen Punkt F in Aufriss gebracht hat, lässt sich ohne Schwierigkeit nach den bekannten Regeln der Schatten f desselben auf der Senkfläche ermitteln.

Nach denselben Regeln findet man den Schatten g eines weiteren, auf dem oberen Plattenrande gelegenen Punktes G . In gleicher Weise bezeichne man beliebig noch eine Reihe anderer Punkte des oberen Plattenrandes, und bestimme ihren Schatten auf der Senkfläche, so ergiebt sich die Ellipse $ngfhi$ als der Schatten, welchen die obere Kreisfläche der Platte werfen würde, wenn sie allein vorhanden wäre.

Zieht man von dem Punkte f eine Vertikale herab, auf welcher man die Länge fl gleich der vertikalen Höhe der Platte abmisst, so ist fl der Schatten der Vertikalen FL (§. 30). Diese Gerade fl bildet auf der rechten Seite die Gränze des Schattens, welchen die Mantelfläche der Platte auf die Senkfläche wirft.

Zieht man ferner durch verschiedene willkürlich gewählte Punkte der Ellipse $ngfhi$ Vertikale, auf denen man eine Länge gleich fl nach unten abmisst, so erhält man eine Reihe von Punkten, durch welche man eine Ellipse ziehen kann, welche der Ellipse $ngfhi$ gleich und parallel ist. Diese Ellipse ist der Schatten, welchen die untere Fläche der Platte werfen würde, wenn sie für sich allein vorhanden wäre. Es genügt von dieser Ellipse nur den unteren Theil lmo zu ziehen.

Endlich bleibt noch der Schlagschatten zu construiren, welchen die sechseckige Säule wirft, der grösste Theil dieses Schattens fällt auf die Grundfläche. Der Schatten der Kante st trifft die Grundlinie in r . Eine durch r gezogene Vertikale rm ist der Schatten, welchen ein Theil der Kante st auf die Senkfläche wirft.

Auf Tab. VI ist der Schatten construirt, welcher auf einen vertikalen Hohlcyylinder von halbkreisförmiger Basis unter verschiedenen Umständen geworfen wird.

IV. Tab. VI
Fig. 12.

Fig. 12, Tab. VI stellt einen solchen Hohlcyylinder dar, welcher oben ganz offen ist, während in denselben ungefähr in der Mitte seiner Höhe eine kreisförmige Platte von gleichem Durchmesser mit dem Hohlcyylinder eingesetzt ist, welche also zur Hälfte aus dem Hohlcyylinder hervorragt.

Um den Schatten zu finden, welchen die vertikale Kante AB auf die hohle Cylinderfläche wirft, hat man zunächst den Schatten des Punktes A zu ermitteln. Wie dies geschieht, bedarf nach dem bisher Besprochenen keiner weiteren Erklärung mehr, zumal das Verfahren durch die Figur selbst hinlänglich erläutert wird. — Eine durch a bis zur Grund-

linie herabgezogene Vertikale ist der Schatten, welchen die Kante AB auf die hohle Cylinderfläche wirft.

Die Mantelfläche des hohlen Cylinders erscheint im Grundriss zum Halbkreis verkürzt; eine an diesen Halbkreis parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen gelegte Tangente berührt ihn im Punkte D . Der auf dem oberen Rande des Hohlcyinders gelegene Punkt D bildet nun die Gränze des Bogens AD , welcher einen Schatten auf die Fläche des Hohlcyinders wirft. Wählt man auf dem Bogen AD irgend einen Punkt C , so lässt sich leicht nach den bekannten Regeln der Schatten c desselben finden. Eine durch die Punkte a , c und d gelegte Curve ist der Schatten des Bogens AD , also die obere Gränze des Schlagschattens, welchen die links gelegene Parthie der hohlen Cylinderfläche auf dieselbe wirft.

Um den Schlagschatten zu finden, welchen die in der Mitte des Hohlcyinders eingesetzte kreisförmige Platte wirft, bezeichnet man am unteren Rande des vorstehenden Theils derselben einige Punkte E , F , G und H , deren Schatten e , f , g und h nach den bekannten Regeln gefunden worden. Die durch die Punkte e , f , g und h gelegte Curve ist die untere Gränze des Schlagschattens, welchen die fragliche Platte auf die hohle Cylinderfläche wirft.

Der Schatten, welchen die kreisförmige Platte wirft, fällt zum Theil noch auf die der Bildfläche parallele Wand $LMNO$. Diese Schattenparthie wird nach denselben Regeln construirt, wie der Schatten, welchen die kreisförmige Platte Fig. 11, Tab. V auf die Senkfläche wirft.

Fig. 14 stellt einen halbkreisförmigen Hohlcyylinder dar, welcher dem in Fig. 12 ganz IV. Tab. VI gleich ist; nur ist derselbe oben mit einer Platte bedeckt, deren vordere Fläche mit der Fig. 14. Gränzebene zusammenfällt, welche nach vorn hin die Höhlung der Cylinderfläche abschneidet.

Um den Schatten der Kante AO zu finden, werden mehrere Punkte B , C , D auf derselben bezeichnet und der Schatten derselben, sowie der des Punktes A auf der hohlen Cylinderfläche nach der bekannten Weise construirt. Die Curve $abcdO$, welche man über diese Schattenpunkte zieht, ist die untere Gränze des Schattens, welchen die auf den halben Hohlcyylinder aufgelegte Platte auf die Mantelfläche des Hohlcyinders wirft.

Ungefähr in der halben Höhe des Hohlcyinders Fig. 14 ist eine Platte eingesetzt, deren hervorragender Theil durch drei vertikale ebene Flächen begränzt wird. Wie der Schatten dieser Platte zu construiren ist, lehrt schon der Anblick der Figur.

Die mittlere Figur der Tab. VI stellt eine Nische dar, deren unterer Theil durch die IV. Tab. VI Hälfte eines vertikalen Hohlcyinders, deren oberer Theil aber durch den vierten Theil einer Fig. 13. Hohlkugel gebildet ist, welche mit dem Hohlcyylinder gleichen Durchmesser hat. Es handelt sich hier darum, den Schatten zu construiren, welchen die vertikale Kante AB und die kreisförmig gekrümmte Kante $BCDR$ auf die theils cylinder-, theils kugelförmige Hohlfläche werfen.

Die Punkte B , F und C werfen ihren Schatten b , f und c auf die vertikale Cylinderfläche, ihre Bestimmung hat also nach den obigen Erläuterungen keine Schwierigkeit. Dagegen müssen wir der Construction des Schattens, welcher auf die kugelförmige Wölbung des oberen Theiles fällt, etwas näher betrachten.

Zieht man im Aufriss parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen eine Tangente an den Halbkreis BGR , so ist der Berührungspunkt D die Gränze desjenigen Bogenstückes BGD , welches einen Schatten in die Nische wirft. Es kommt nun also darauf an, den

Schatten mehrerer zwischen C und D gelegener Punkte des Kreisbogens BCR durch Construction zu ermitteln.

Diese Construction wird ganz nach den in §. 33 besprochenen Grundsätzen ausgeführt.

Denken wir uns durch den Punkt G einen Sonnenstrahl, und durch diesen eine Vertikalebene gelegt, so schneidet diese Vertikalebene die kugelförmige Höhlung in einem Kreisbogen Gno , der im Aufriss unserer Figur zu einem elliptischen Bogenstück verkürzt erscheint.

Die Construction dieses elliptischen Bogenstückes hat für denjenigen, welcher die Paragraphen 32 u. 33 des ersten Theiles verstanden und eingeübt hat, keine Schwierigkeit, zumal die Construction eines der Punkte n , über welche der elliptische Bogen zu ziehen ist, in der Figur hinlänglich angedeutet wurde.

Der Schatten g des Punktes G liegt nun auf dem Durchschnitt des elliptischen Bogens Gno mit der Geraden, welche im Aufriss durch den Punkt G parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen zu ziehen ist.

Auf die gleiche Weise wird der Schatten h des Punktes H gefunden und endlich über die gefundenen Punkte die Schattengränze $Dhgcfb$ gezogen.

35 Schlagschatten solcher Körper, welche von doppelt gekrümmten Oberflächen begrenzt sind. Bisher haben wir die Construction des Schattens solcher Körper ausgeführt, welche ganz oder doch theilweise von ebenen Flächen begrenzt waren und an welchen man deshalb bestimmte Kanten angeben konnte, deren Schatten die Gränze des gesuchten Schlagschattens bildete.

Wir wollen nun aber zur Betrachtung von Körpern übergehen, an welchen keine Kanten vorkommen, welche die Schattengränze bilden könnten.

Um den Schatten solcher Körper zu construiren, denke man sich durch irgend einen der beleuchtenden Sonnenstrahlen eine Vertikalebene, und parallel mit dieser eine Reihe weiterer Ebenen gelegt, welche den Schatten werfenden Körper schneiden. Diese schneidenden Ebenen wollen wir kurz als Vertikalebenen der Sonnenstrahlen bezeichnen. Der Durchschnitt der Körperoberfläche mit einer solchen Vertikalebene ist eine Curve, an welche man parallel mit der Richtung der Sonnenstrahlen eine Tangente zu legen hat, um einen Punkt der Schattengränze zu finden.

Wir wollen diese allgemein ausgesprochene Regel zunächst an einer Kugel erläutern.

IV. Tab. VII Fig. 15. Fig. 15, Tab. VII stellt eine Kugel dar, welche auf der Grundfläche aufliegt. Im Grundriss erscheint sie durch den horizontalen grössten Kreis $DGBF$ begrenzt, welcher im Aufriss zur Linie verkürzt ist. — Im Aufriss wird die Gränze der Kugel durch den vertikalen grössten Kreis $LANC$ gebildet.

Denkt man sich durch den Mittelpunkt der Kugel eine gerade Linie in der Richtung der Sonnenstrahlen, und durch diese eine Vertikalebene gelegt, so ist der Durchschnitt dieser Vertikalebene mit der Kugeloberfläche ein Kreis $DABC$, welcher im Grundriss zur Linie, im Aufriss aber zur Ellipse verkürzt erscheint.

Dieser Kreis wird nun an zwei diametral gegenüber liegenden Punkten von den Sonnenstrahlen tangirt. Man findet die Berührungspunkte H und i im Aufriss, wenn man parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen Tangenten in die Ellipse $DABC$ legt.

Die Tangente, welche in H die Ellipse berührt, trifft die Grundlinie in h . Dieser Punkt h ist der Schatten, welchen der Punkt H auf die Grundfläche wirft. Man findet den Punkt h im Grundriss, wenn man von h des Aufrisses eine Vertikale herabzieht bis zur Durchschneidung mit der Verlängerung von DB .

In gleicher Weise wird der Schatten i des Punktes J gefunden.

Die Punkte h und i sind die Gränzen des linearen Schattens, welchen der vertikale Kreis $DABC$ auf die Grundfläche wirft.

Legen wir im Grundriss parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen, also parallel mit Dh , zwei Tangenten an den Kreis $DGBF$, so berühren sie denselben in den Punkten F und G ; in F und in G wird also die Kugel von Sonnenstrahlen gestreift. Die Punkte f und g der Grundfläche, auf welche der Schatten der Punkte F und G fällt, lassen sich nach den bekannten Regeln leicht bestimmen.

Es lässt sich nun leicht übersehen, dass fg die kleine, hi aber die grosse Axe des elliptischen Schattens ist, welchen die Kugel auf die Grundfläche wirft, über welche man dieselbe leicht construiren kann.

In Fig. 16 auf Tab. VII ist eine Kugel in Grund- und Aufriss dargestellt, welche der in IV. Tab. VII Fig. 15 ganz gleich ist, nur ist sie auf einen cylindrischen Stab gestellt und weiter zurück Fig. 16. gerückt, so dass ihr Schatten noch vollständig auf die Senkfläche fällt; sehen wir nun, wie dieser Schatten zu construiren ist.

Denken wir uns parallel mit der Vertikalebene der Sonnenstrahlen eine Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel gelegt, so schneidet diese Ebene die Kugeloberfläche in einem vertikalen Kreise, welcher im Grundriss zur geraden Linie, im Aufriss zu einer Ellipse verkürzt erscheint, welche wir kurz mit 1 bezeichnen wollen.

Zieht man parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen im Aufriss zwei Tangenten an die Ellipse 1, so findet man die Punkte H und J , in welchen der vertikale, zur Ellipse 1 verkürzt erscheinende Kreis von den Sonnenstrahlen gestreift wird. Die Punkte h und i der Senkfläche oben, auf welche der Schatten der Punkte H und J fällt, lassen sich nun leicht bestimmen.

Der horizontale grösste Kreis $DGBF$ der Kugel wird von den Sonnenstrahlen in den Punkten G und F gestreift. Der Schatten der Punkte G und F fällt aber auf die leicht zu ermittelnden Punkte g und f der Senkfläche.

Um weitere Punkte des Umfangs der Schattenellipse zu finden, lege man eine weitere Ebene parallel mit der Vertikalebene der Sonnenstrahlen durch irgend einen Punkt O des horizontalen grössten Kreises, welcher zwischen D und F liegt. Diese Ebene schneidet die Kugeloberfläche in einem Kreise, welcher im Grundriss zur geraden Linie verkürzt ist, im Aufriss aber als Ellipse erscheint, welche in unserer Figur mit 2 bezeichnet ist. Zwei parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen an diese Ellipse gelegte Tangenten berühren dieselbe in den Punkten N und P , deren Schatten n und p ganz auf dieselbe Weise gefunden werden, wie die Schatten h und i der Punkte H und J .

Der Schatten des cylindrischen Stabes, auf welchem die Kugel ruht, fällt zum Theil auf die Grundfläche, zum Theil auf die Senkfläche. Seine Construction bedarf keiner weiteren Erläuterung.

IV. Tab. IX Fig. 19. Fig. 19, Tab. IX stellt Grund- und Aufriss eines auf der Grundfläche liegenden Ringes von kreisförmigem Querschnitt dar. Der Schlagschatten, welchen derselbe auf die Grundfläche wirft, kann ganz nach den eben erläuterten Regeln construirt werden.

Zieht man im Grundriss durch den Mittelpunkt des Ringes eine Gerade RS in der Richtung der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen, denkt man sich alsdann durch diese Gerade eine Vertikalebene gelegt, so schneidet dieselbe den Ring in zwei Kreisen, $ABCD$ und $EFGH$, welche im Grundriss zur geraden Linie, im Aufriss aber zur Ellipse verkürzt erscheinen. Von diesen beiden Ellipsen ist in unserm Aufriss nur eine gezeichnet, weil dies für die verlangte Schattenconstruktion genügt.

An die Ellipse $ABCD$ werden nun parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen zwei Tangenten gezogen, welche dieselben in den Punkten J und L berühren. Die Schatten i und l , welche diese beiden Punkte, in welchen der Ring von den Sonnenstrahlen gestreift wird, auf die Grundfläche werfen, können nach den bekannten Regeln bestimmt werden.

Da der Schatten l des Punktes L im Grundriss durch den Ring verdeckt erscheint, so sind die Punkte L und l im Grundriss weggelassen.

Die Ellipse $EFGH$ wird in gleicher Weise von einem Sonnenstrahle in einem Punkte N gestreift, dessen Lage im Grundriss dadurch bestimmt werden kann, dass man HN gleich DJ macht. Ferner findet man den Schatten n des Punktes N im Grundriss, indem man Nn gleich Ji macht.

Eine durch den Mittelpunkt des Ringes parallel mit der Senkfläche gelegte Ebene schneidet den Ring in den beiden mit 1 und 2 bezeichneten Kreisen, welche im Grundriss zu geraden Linien verkürzt, im Aufriss unverkürzt erscheinen.

Zieht man an den Kreis 1 parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen zwei Tangenten, so berührt die eine derselben den Kreis in M , die andere berührt ihn in V . — Diese beiden Punkte M und V sind nun auch solche, in welchen der Ring von den Sonnenstrahlen gestreift wird.

Der Schatten m des Punktes M lässt sich nach den bekannten Regeln auffinden. Der Schatten, welchen der Punkt V auf die Grundfläche wirft, wird vom Ring selbst bedeckt und ist deshalb in unserer Figur auch nicht weiter bestimmt worden.

Macht man im Grundriss der Fig. 19 BZ gleich BY , denkt man sich alsdann durch den Punkt Z und den Mittelpunkt des Ringes eine Vertikalebene gelegt, so schneidet derselbe den Ring in zwei Kreisen, von denen wir den vorderen mit 3, den hinteren mit 4 bezeichnet haben. Beide Kreise erscheinen, da wir angenommen haben, dass die Horizontalprojection der Sonnenstrahlen einen Winkel von 45° mit der Grundlinie machen soll, nicht allein im Grundriss, sondern auch im Aufriss zur geraden Linie verkürzt.

In Beziehung auf die durch RS gelegte Vertikalebene sind die beiden Kreise 1 und 3 symmetrisch, es muss dies also auch in Beziehung auf ihre Schatten der Fall sein. Macht man also im Grundriss auf dem zur Linie verkürzten Kreise 3 ZQ gleich MY , so sind Q und M entsprechende Punkte und man erhält den Schatten q von Q , wenn man durch diesen Punkt eine gerade Linie parallel mit RS zieht und auf derselben Qq gleich Mm macht.

Zieht man im Aufriss der Fig. 19 parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen eine Tangente an den oberen Theil des Kreises 2, so erhält man einen weiteren Punkt U ,

in welchem der Ring von den Sonnenstrahlen gestreift wird. Der Schatten aber, welchen U auf die Grundfläche wirft, ist in u .

In Beziehung auf RS sind die Kreise 2 und 4 symmetrisch. Bezeichnet man demnach im Grundriss auf dem zur Linie verkürzten Kreise einen Punkt T , welcher vom Mittelpunkt des Ringes ebenso weit entfernt ist als U , so ist T ein weiterer Punkt, in welchem der Ring von den Sonnenstrahlen gestreift wird. Den Schatten, welchen T auf die Grundfläche wirft, findet man aber, wenn man durch T eine Linie parallel mit RS zieht und auf derselben Tt gleich Uu macht.

Um weitere Punkte der Schattengränze des Ringes zu erhalten, denke man sich durch den Mittelpunkt des Ringes eine Horizontalebene gelegt; dieselbe schneidet den Ring in zwei concentrischen Kreisen, welche im Aufriss zu einer geraden Linie verkürzt, im Grundriss aber unverkürzt erscheinen. Wir wollen den grösseren dieser Kreise mit 5, den kleineren mit 6 bezeichnen.

Zwei im Grundriss parallel mit RS an den Kreis 5 gelegte Tangenten berühren denselben in den Punkten O und P und dies sind zwei weitere Punkte, in welchen der Ring von den Sonnenstrahlen gestreift wird und deren Schatten o und p nach den bekannten Regeln zu ermitteln ist.

Eine durch die Punkte p, t, n, u und o gelegte Curve bildet die Gränze des Schattens, welchen der hintere Theil des Ringes auf die Grundfläche wirft.

Die Gränze des Schattens, welchen die vordere Hälfte des Ringes auf die Grundfläche wirft, geht durch die Punkte m, i und q .

Andere Methode, den Schlagschatten doppelt gekrümmter Oberflächen zu construiren. Will man die Construction der Ellipsen vermeiden, zu welchen die Kreise 1, 2 u. s. w. im Aufriss der Fig. 16 verkürzt erscheinen, so muss man den Grundriss der Kugel sammt der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen und sammt der Horizontalprojection der den Schatten auffangenden Ebene (in unserem Falle ein Stück der Grundlinie) so weit wenden, dass die Horizontalprojection der Sonnenstrahlen (also auch die Ebene der Kreise 1 und 2) parallel wird mit der Senkfläche.

In Fig. 17, Tab. VIII ist die Kugel in gleicher Stellung und mit gleicher Richtung der Sonnenstrahlen gezeichnet, wie in Fig. 16, Tab. VII, nur ist das Säulchen weggelassen, welches die Kugel in Fig. 16 trägt, so dass in Fig. 17 die Kugel in gleicher Lage als in der Luft schwebend dargestellt ist. Fig. 17.

Im Grundriss Fig. 17 ist parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen zunächst eine Gerade durch den Mittelpunkt der Kugel gezogen, welche die Grundlinie im Punkt h' trifft. Eine durch diese Linie gelegte Vertikalebene schneidet die Kugel in dem auf Tab. VII mit 1 bezeichneten Kreise.

Eine auf der Vertikalebene der Sonnenstrahlen rechtwinklig stehende, durch den Mittelpunkt M der Kugel gelegte Gerade schneidet die Kugeloberfläche in den Punkten G und F . In diesen beiden Punkten aber wird die Kugel, wie wir bereits gesehen haben, von den Sonnenstrahlen gestreift und es ist leicht, den Punkt f zu ermitteln, in welchem der Schatten von F auf die Senkfläche fällt.

An einer beliebigen Stelle zwischen Ff' und Mh' ist parallel mit diesen Linien im Grundriss der Fig. 17 eine Gerade Vn' gezogen, welche die Grundlinie in n' trifft. Eine

durch diese Gerade gelegte Vertikalebene schneidet die Kugel in dem Kreise 2, welcher im Grundriss zur Linie verkürzt erscheint.

Jenseits der Linie Mh' ist parallel mit derselben Zr' gezogen und zwar in gleichem Abstand von Mh' wie Vn' . Eine durch Zr' gelegte Vertikalebene schneidet die Kugel in einem Kreise 3, welcher gleich ist dem Kreise 2 und welcher wie dieser im Grundriss zur Linie verkürzt erscheint.

IV. Tab. VIII Um nun die Construction der Ellipsen zu vermeiden, als welche die Kreise 1, 2 und 3 im Aufriss der Fig. 17 erscheinen würden, ist nun in Fig. 18 der ganze Grundriss so gewendet, dass die Horizontalprojection der Sonnenstrahlen, dass also Mh' , Vn' , Ff' u. s. w. der Grundlinie parallel werden und zwar sammt dem Stück XY der Grundlinie, auf welchem die Punkte g' , r' , h' u. s. w. liegen; die den Schatten auffangende Ebene, welche in Fig. 17 mit der Bildfläche zusammenfiel, ist also in Fig. 18 in eine solche Lage gebracht, dass ihre Horizontalprojection XY einen Winkel mit der Grundlinie macht.

Im Aufriss erscheinen die Kreise 1, 2 und 3 unverkürzt, der Kreis 3 erscheint aber vom Kreis 2 vollkommen gedeckt.

Im Aufriss der Fig. 18 findet man nach den bekannten Regeln den Punkt F als Durchschnittspunkt einer durch F im Aufriss der Fig. 17 gezogenen Horizontalen mit einer durch F des Grundrisses Fig. 18 gezogenen Vertikalen. In gleicher Weise liegt der Punkt f im Aufriss der Fig. 18 vertikal über f' des Grundrisses Fig. 18 und in gleicher Höhe mit f des Aufrisses der Fig. 17.

Eine von F nach f im Aufriss der Fig. 18 gezogene Gerade giebt die Richtung der Sonnenstrahlen für den gewendeten Aufriss an.

Zieht man parallel mit Ff zwei Tangenten an den Kreis 1, so erhält man die Berührungspunkte H und J , deren Schatten h und i auf den fraglichen Tangenten und vertikal über h' des Grundrisses liegen.

Zwei parallel mit Ff an den Kreis 2 gelegte Tangenten berühren denselben in den Punkten N und P und diese Tangenten werden von einer durch den Punkt n' des Grundrisses gelegten Vertikalen in den Punkten n und p geschnitten. Die Punkte n und p sind die Schatten, welche die Kugelpunkte N und P auf die vertikale Ebene $X'Y'YX$ werfen, welche im Grundrisse der Fig. 18 zur geraden Linie XY verkürzt erscheint.

Die parallel mit Ff an den Kreis 3 gelegten Tangenten fallen im Aufriss mit den an den Kreis 2 gelegten Tangenten zusammen. Die Berührungspunkte R und Q liegen gerade hinter N und P . Die gesuchten Schatten r und q dieser beiden Berührungspunkte liegen da, wo die Tangenten Nn und Pp von einer durch r' des Grundrisses Fig. 18 gezogenen Vertikalen durchschnitten werden.

Der Schatten g des Punktes G ergiebt sich auf dieselbe Weise, wie der Schatten f des Punktes F .

Ueber die Punkte r , h , n , f , p , i , q und g kann man nun die Ellipse ziehen, welche den von der Kugel auf die vertikale Ebene $X'Y'YX$ geworfenen Schatten begrenzt.

Der Schatten, welchen die Kugel auf die Vertikalebene XY Fig. 18 wirft, ist genau derselbe, wie der Schlagschatten, welcher von der Kugel auf die Senkfläche Fig. 17 fällt, nur erscheint die Schattenellipse im Aufriss der Fig. 18 verkürzt, weil ihre Ebene einen Winkel mit der Senkfläche macht.

Wir erhalten also die Schattenellipse für die Fig. 17, wenn wir den Grundriss der

Fig. 18 wieder in die ursprüngliche Lage Fig. 17 zurückgebracht denken und dann zu diesem zurückgewendeten Grundriss den Aufriss mit Hülfe des Aufrisses Fig. 18 construiren.

So erhält man z. B. die Punkte h, n, f u. s. w. im Aufriss der Fig. 17, wenn man durch die Punkte h', n', f' u. s. w. der Fig. 17 Vertikale zieht bis zur Durchschneidung mit den durch die Punkte h, n, f u. s. w. des Aufrisses Fig. 18 gezogenen horizontalen Linien.

Die nach dieser Methode construirte Schattenellipse $hnfpiggr$ Fig. 17, Tab. VIII ist natürlich der auf anderem Wege erhaltenen Schattenellipse $hnfpi$ in Fig. 16, Tab. VII ganz gleich.

Die Kugeln selbst sind auf Tab. VIII absichtlich unschattirt geblieben.

In ähnlicher Weise kann man die Wendung des Grundrisses auch benutzen, um den Schatten zu construiren, welchen die auf der Grundfläche liegende Kugel Fig. 15, Tab. VII auf die Grundfläche wirft.

Bei Ausführung dieser Aufgabe begnüge sich der Schüler nicht damit, den Schatten der beiden Punkte G und F und den Schatten des vertikalen grössten Kreises $ABCD$ Fig. 15 zu construiren (welcher nichts anders ist als eine Gerade, deren Endpunkte h und i sind), sondern man lege parallel mit der Ebene des Kreises $ABCD$ zwei weitere Vertikalebene, welche die Kugel in Kreisen schneiden, die den Kreisen 2 und 3 in Fig. 17 und Fig. 18 entsprechen, und bestimme die Endpunkte des Schattens, welchen jeder dieser beiden Kreise auf die Grundfläche wirft nach den in Fig. 17 und 18 erläuterten Principien. Auf diese Weise erhält man acht Punkte, über welche man die Schatten-Ellipse ziehen kann.

Um die Construction von Ellipsen zu vermeiden, kann man das Princip der Wendung auch bei der Construction des Schattens in Anwendung bringen, welchen die Pyramide Fig. 9 auf Tab. IV auf den horizontal liegenden Cylinder wirft.

Zunächst wendet man den Grundriss sammt der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen so weit, dass die Axe des Cylinders rechtwinklig auf der Senkfläche steht, dass also die vordere Endfläche des Cylinders unverkürzt als Kreis erscheint. Der ganze Schlagschatten, welchen die Pyramide auf die Cylinderoberfläche wirft, erscheint nun zu einem kreisförmigen Bogen verkürzt. Nachdem man auf diesem Bogen die Punkte s, c, d, e bestimmt hat, auf welche der Schatten der Punkte S, C, D, E der Pyramidenkante SB und entsprechender Punkte der Kante SA fällt, kann man leicht diese Punkte s, c, d u. s. w. in Grundriss bringen, und so die gesuchte Schattengränze im Grundriss erhalten. Nachdem man diese Schattengränze in den ungewendeten Grundriss übertragen hat, kann man sie endlich leicht auch nach den bekannten Grundsätzen in den ursprünglichen Aufriss bringen.

Der Schüler führe die hier angedeuteten Aufgaben vollständig aus.

Wendeschaten. Wenn irgend ein Körper den Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, so wird ein Theil seiner Oberfläche von den Sonnenstrahlen beschienen, während der der Sonne abgewendete Theil seiner Oberfläche nicht von den Sonnenstrahlen getroffen wird. 37

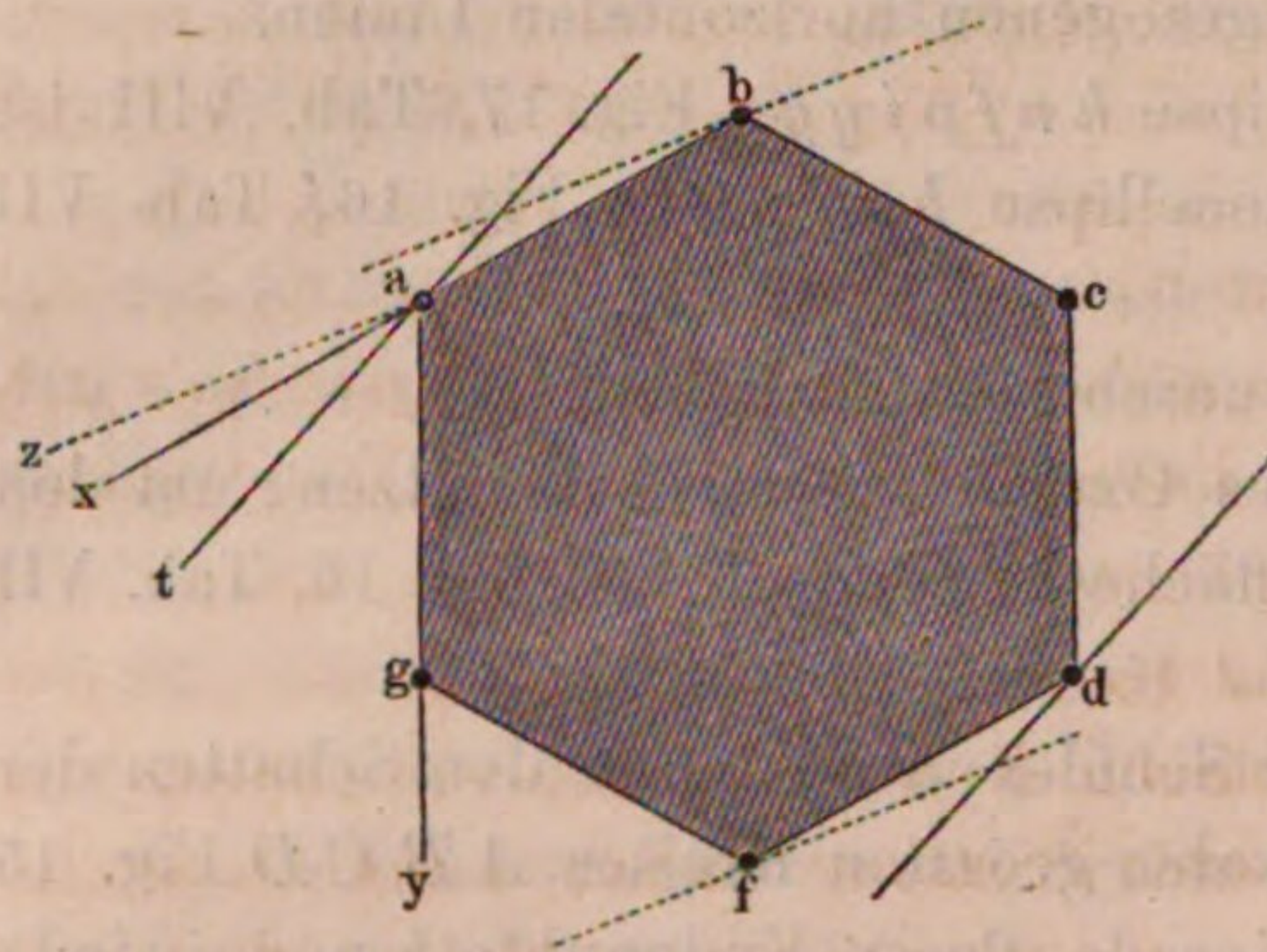
Die Gränze zwischen dem von den Sonnenstrahlen getroffenen und dem nicht von ihnen getroffenen Theil der Körperoberfläche wollen wir die Lichtgränze nennen.

Bei solchen Körpern, welche nur von ebenen Flächen begränzt sind, wird die Lichtgränze stets von festen Kanten gebildet, so dass die Richtung der Sonnenstrahlen innerhalb gewisser Gränzen geändert werden kann, ohne dass dadurch auch die Lichtgränze geändert wird. Erst wenn die Richtung der Sonnenstrahlen über die angedeuteten

Gränzen hinaus geändert wird, geht die Lichtgränze von der einen Kante auf eine benachbarte über.

Es sei z. B. in Fig. 1 *abcdef* der Grundriss einer vertikalen regelmässigen sechs-

Fig. 1.

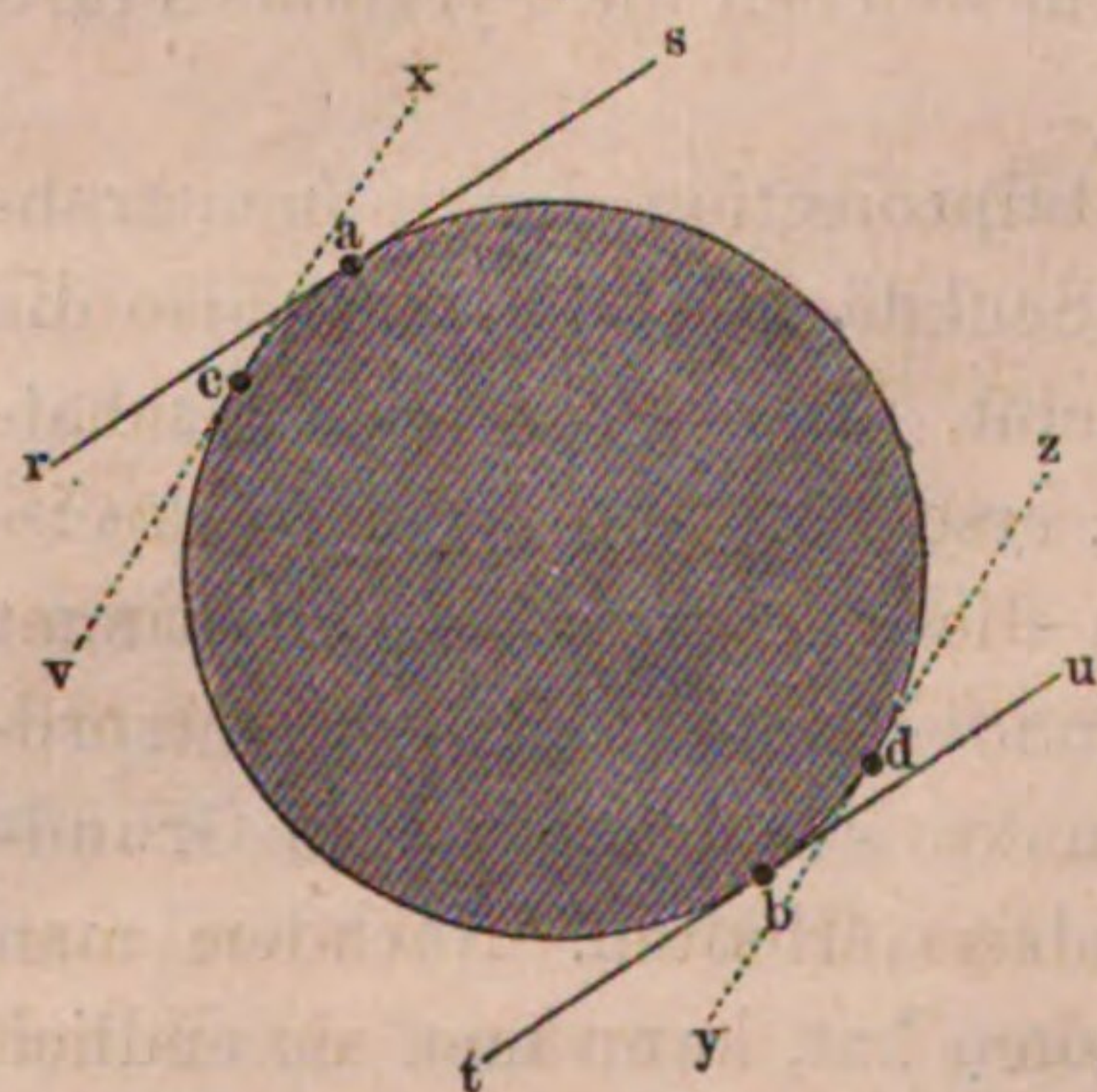


seitigen Säule, so werden die vertikalen Kanten, welche, in den Eckpunkten *a* und *d* verkürzt erscheinen, so lange die Lichtgränze bilden, als die Horizontalprojection der Sonnenstrahlen irgend einer Linie, z. B. *at* parallel ist, welche noch innerhalb des Winkels *xay* liegt. Sobald aber die Richtung der Sonnenstrahlen von der Art ist, dass eine parallel mit ihrer Horizontalprojection durch den Punkt *a* gezogene Linie noch jenseits *ax* liegt, wie z. B. *az*, so wird alsbald die Kante *b* einerseits und die Kante *f* andererseits die Lichtgränze bilden.

Betrachten wir nun statt der sechsseitigen Säule einen Cylinder von kreisförmiger Basis, so wird die Lichtgränze auf der Mantelfläche nicht mehr durch eine feste Kante gebildet und sie ändert ihre Lage mit der geringsten Veränderung in der Richtung der Sonnenstrahlen.

Es sei z. B. der Kreis in Fig. 2 der Grundriss eines vertikal stehenden Cylinders;

Fig. 2.



rs und *tu* seien zwei in der Richtung der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen an den Kreis gelegte Tangenten, welche denselben in den Punkten *a* und *b* berühren, so wird die Schattengränze (Lichtgränze) auf der Mantelfläche des Cylinders von den beiden durch die Punkte *a* und *b* gelegten Vertikalen gebildet.

Sobald die Richtung der Tangenten nur im mindesten geändert wird, so ändert sich auch die Lage der Berührungspunkte und damit auch die Lage der Lichtgränze. Wird z. B. die Richtung der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen so geändert, dass *vx* und *yz* die Horizontalprojectionen der den Cylinder streifenden Sonnenstrahlen sind, so werden die Berührungspunkte *c* und *d* die Horizontalprojectionen der Lichtgränze auf dem Cylindermantel sein.

Diese stetig veränderliche Lichtgränze auf einer krummen Oberfläche wird nun mit dem Namen des Wendeschattens bezeichnet. Der Wendeschatten ist die Curve, welche den von den Sonnenstrahlen getroffenen Theil der krummen Oberfläche von dem nicht getroffenen scheidet, oder mit anderen Worten, es ist die Curve, in welcher die krumme Oberfläche von den Sonnenstrahlen gestreift wird.

Bei einem Cylinder von kreisförmiger Basis wird der Wendeschatten durch zwei der Cylinderaxe parallele auf der Mantelfläche einander diametral gegenüberliegende gerade Linien gebildet.

Auf einer Kugel bildet der Wendeschatten einen grössten Kreis. Im Aufriss der Fig. 18,

Tab. VIII ist dieser grösste Kreis zur geraden Linie verkürzt, im Aufriss der Fig. 17 erscheint er als eine Ellipse, welche durch die Punkte $NFPJQGRH$ gelegt ist.

Der Schatten dieses grössten Kreises (welchen wir den Wendeschatten der Kugel nennen) bildet die Curve, welche den Schatten der Kugel begränzt.

Der im Aufriss des Ringes Fig. 19, Tab. IX sichtbare Theil des Wendeschattens ist die Curve $VLXOU$.

Der Wendeschatten des Ringes, welcher im Grundriss der Fig. 19 sichtbar ist, besteht aus zwei getrennten Stücken, von welchen das eine $PTNUO$ den Schatten $ptnuo$ wirft, während die Schattengränze miq von dem durch die Punkte MJQ laufenden Wendeschatten herrührt.

Der Lauf des Wendeschattens ist in Fig. 17 und 18 der Tab. VIII und in Fig. 19 der Tab. IX durch eine ausgezogene Curve sichtbar gemacht. Es versteht sich von selbst, dass in ausgeführten schattirten Figuren die Linie des Wendeschattens ebenso wenig als ausgezogene Linie sichtbar sein darf wie die Gränzlinie des Schlagschattens und die verschiedenen zur Ausführung der Schattenconstruction nöthigen Hilfslinien.

Helligkeit der Flächen. Wir haben bisher nur die Construction der Schlagschatten und die Bestimmung der Lichtgränze auf den schattenwerfenden Körpern besprochen; wir müssen aber nun auch noch die Helligkeitsverhältnisse der verschiedenen Theile der Oberfläche desselben näher betrachten. 38

Die Helligkeit einer von den Sonnenstrahlen erleuchteten ebenen Fläche hängt von dem Winkel ab, unter welchem die Strahlen sie treffen; ihre Helligkeit ist am grössten, wenn sie rechtwinkelig von den Sonnenstrahlen getroffen wird, d. h. wenn die Richtung der Sonnenstrahlen mit der Richtung eines auf der Ebene errichteten Perpendikels zusammenfällt.

Die Helligkeit der erleuchteten Ebene wird um so kleiner, je kleiner der Winkel wird, welchen die Richtung der Sonnenstrahlen mit der Ebene macht; sie wird gleich Null, wenn sie von den Sonnenstrahlen gestreift wird, d. h. wenn die Richtung der Sonnenstrahlen mit der Ebene zusammenfällt.

Von den vertikalen Flächen der achtseitigen Platte Fig. 7, Tab. III sind im Aufriss vier der vertikalen Säulenwände sichtbar. Der Winkel, welchen die Sonnenstrahlen mit diesen Säulenflächen macht, ist sehr ungleich. Er ist am grössten für die Säulenfläche, deren untere Kante AB ist, kleiner für die Säulenfläche, deren untere Kante BC ist, noch kleiner endlich für diejenige, deren untere Kante CR ist. Von diesen drei Flächen, die wir der Kürze halber mit den Buchstaben ihrer unteren Kanten bezeichnen wollen, ist demnach AB die hellste, CR aber die dunkelste. Die vertikale Säulenkante, deren unterster Punkt R ist, bildet die Lichtgränze, die Säulenfläche, deren untere Kante RS ist und die wir ebenfalls kurz mit diesen Buchstaben bezeichnen wollen, wird also gar nicht mehr von den Sonnenstrahlen getroffen. Deshalb aber ist diese Säulenfläche RS keineswegs absolut dunkel, da ihr von verschiedenen Seiten her vielfach reflectirtes Licht zukommt.

Wollte man ganz genau die Helligkeitsverhältnisse aller von den Sonnenstrahlen getroffenen ebenen Flächen eines Körpers ermitteln, so müsste man zunächst für jede einzelne derselben den Winkel bestimmen, welchen sie mit der Richtung der Sonnenstrahlen macht,

denn von diesem Winkel hängt die Helligkeit der Fläche ab und zwar nach einem Gesetze, dessen Ausdruck ohne trigonometrische Formeln nicht wohl möglich ist¹⁾.

Da man nun aber doch nicht im Stande ist, in der Zeichnung die Schattirung der verschiedenen Flächen sei es durch Tuschen oder durch Schraffirung den berechneten oder construirten Helligkeitswerthen wirklich genau proportional zu machen, man sich also mit Schätzungen des Auges begnügen muss, da ferner die etwas schräger von den Sonnenstrahlen getroffenen Flächen auch noch durch Reflexe Licht erhalten, dessen Stärke sich nicht genau bestimmen lässt, so ist es auch überflüssig, den Winkel, welchen die einzelnen ebenen Flächen mit den Sonnenstrahlen machen und danach ihre Helligkeitsverhältnisse ganz genau zu bestimmen, was immer, mag es nun durch Rechnung oder durch Construction geschehen, eine etwas umständliche Arbeit ist.

Man wird also im Allgemeinen die Flächen um so dunkler schattiren, je schräger sie (nach einer in den meisten Fällen vollkommen genügenden Schätzung) von den Sonnenstrahlen getroffen werden²⁾.

¹⁾ Bezeichnet man mit J die Helligkeit einer ebenen Fläche, welche rechtwinkelig von den Sonnenstrahlen getroffen wird, so ist $J \sin v$ die Helligkeit einer ebenen Fläche, welche einen Winkel v mit der Richtung der Sonnenstrahlen macht.

²⁾ In unseren Figuren ist jede ebene Fläche ihrer ganzen Ausdehnung nach gleichförmig schattirt, weil sie in der Natur in der That ihrer geringen Ausdehnung nach gleich stark erleuchtet ist. Ich weiche hierin von einem vielfach verbreiteten Gebrauche ab, nach welchem man die von dem Beschauer aus weiter zurückliegenden Parthien einer ebenen Fläche weniger dunkel schattirt als die vorderen und zwar so, dass die Dunkelheit der Schattirung nach hinten zu allmählig abnimmt. Nach diesem Gebrauche müsste z. B. die Fläche $HGAB$, Fig. 6, Tab. III, an der vorderen Kante HG am dunkelsten schattirt sein, die Dunkelheit der Schattirung aber allmählig gegen BA hin abnehmen.

Zur Rechtfertigung dieser, nach meiner Ansicht unrichtigen Schattirungsweise führt man folgende Gründe an.

1. Dass an entfernteren Gegenständen wegen der Luftperspective die Schatten weniger dunkel erscheinen.

2. Dass der Contrast eine Fläche an den Kanten dunkler erscheinen lässt, in welchen sie wie in GH Fig. 6 an eine hellere anstösst.

Diese Gründe sind aber nicht stichhaltig. Was die sogenannte Luftperspective betrifft, so besteht sie darin, dass wegen der unvollständigen Durchsichtigkeit der Luft entfernte Gegenstände gleichsam wie mit einem Schleier überzogen erscheinen (siehe meine kosmische Physik, 2. Aufl., S. 270), ihre Schattenparthien also weniger dunkel erscheinen können, als unter sonst gleichen Umständen an näher liegenden Gegenständen.

Der Einfluss der Luftperspective wird aber erst bei Entfernungen von einigen Tausend Fuss merklich, bedeutend aber bei dem gewöhnlichen Zustand der Atmosphäre erst bei meilenweiten Entfernungen. Bei Körpern, deren Dimensionen nur einige Fuss betragen, ist er also vollkommen verschwindend; selbst bei Gebäuden von 100 und mehr Fuss Länge ist er noch unmerklich.

Was den unter Nro. 2 angeführten Grund betrifft, so fällt er zunächst vollständig fort, wenn der Körper vor einem hellen Hintergrunde steht, wie die Ecksäule Fig. 5, Tab. III, denn die Fläche $HGAB$ gränzt auf beiden Seiten an hellere Parthien. Aber selbst wenn die fragliche Fläche auf der einen Seite an eine hellere, auf der anderen Seite an eine dunklere stösst, wie dies für den unteren Theil der Fläche $HGAB$ in Fig. 6, Tab. III der Fall ist, ist der unter Nro. 2 für eine ungleiche Schattirung angegebene Grund unzulässig, denn wenn überhaupt in der Natur die Fläche $GHBA$ Fig. 6, obgleich sie ihrer ganzen Ausdehnung nach gleich stark erleuchtet ist, in Folge des Contrastes in der Nähe der Kante GH dunkler erscheint, so wird aus demselben Grunde auch in der Zeichnung die durchaus gleichförmig angelegte Fläche $HGAB$ in der Nähe der Linie GH dunkler erscheinen müssen, es ist also unnöthig, sie auch noch dunkler zu machen.

Die ungleichförmige Schattirung ebener Flächen ist also unzulässig, weil sie unwahr ist und weil sie den Eindruck gekrümmter Flächen hervorbringt.

So wird z. B. die vertikale Säulenfläche CR , Fig. 7, Tab. III schräger von den Sonnenstrahlen getroffen, als BC , weshalb CR dunkler schattirt ist als BC , ohne dass man erst genau den Winkel bestimmt hätte, welchen die Sonnenstrahlen mit jeder dieser beiden Säulenflächen machen.

In Fig. 1, Tab. I genügt eine einfache Schätzung, um sich zu überzeugen, dass die Fläche AMS schräger von den Sonnenstrahlen getroffen wird als MBS , weshalb denn auch MBS dunkler schattirt ist als AMS .

Was nun aber krumme Oberflächen anbelangt, so ist ihre Helligkeit an verschiedenen Stellen nicht dieselbe. Von der hellsten Stelle der krummen Oberfläche bis zur dunkelsten findet ein allmäliger Uebergang statt.

Um krumme Oberflächen richtig schattiren zu können, ist es demnach vor allen Dingen nöthig, die Stellen der stärksten und der schwächsten Erleuchtung zu bestimmen.

Die Stelle der grössten Dunkelheit auf einer krummen Oberfläche fällt in der Regel mit dem Wendeschatten zusammen. Die Helligkeit, welche die Sonnenstrahlen an der Stelle des Wendeschattens erzeugen, ist gleich Null; auf der einen Seite des Wendeschattens aber ist die krumme Oberfläche durch directe Sonnenstrahlen, auf der andern Seite desselben ist sie durch reflectirtes Licht erleuchtet, welchem, wenn nicht besondere Umstände obwalten, gerade die Stelle des Wendeschattens am wenigsten ausgesetzt ist.

Die Stelle der stärksten Erleuchtung auf einer krummen Oberfläche ist offenbar da, wo sie rechtwinkelig von den Sonnenstrahlen getroffen wird oder, wenn dies für keine Stelle der Fall ist, wo die Sonnenstrahlen den kleinsten Winkel mit der Normalen der Fläche (d. h. mit dem auf der Oberfläche errichteten Perpendikel) machen.

Bestimmen wir zunächst die Stelle der stärksten Erleuchtung für eine von den Sonnenstrahlen beschienene vertikal stehende cylindrische Säule.

Im Grundriss der Fig. 10, Tab. V stellt, wie wir wissen, der innere (punktirte) Kreis die Horizontalprojection einer vertikalen cylindrischen Säule dar. Wird nun parallel mit der Horizontalprojection der Sonnenstrahlen durch den Mittelpunkt M dieses Kreises eine gerade Linie gezogen, so schneidet sie die Peripherie desselben in dem Punkte b . Im Punkte b steht die Horizontalprojection der Sonnenstrahlen rechtwinkelig auf der Horizontalprojection der Cylinder-Oberfläche; eine im Aufriss gezogene Vertikale bb' , deren Verlängerung durch b des Grundrisses geht, wird demnach diejenige Stelle der Cylinderoberfläche sein, welche am stärksten von den Sonnenstrahlen erleuchtet ist.

In unserer Figur aber (Fig. 10, Tab. V) ist die Schattirung dem eben Gesagten keineswegs entsprechend, denn hier erscheint der hellste Theil der Cylinderoberfläche nicht in bb' , sondern weiter nach rechts und zwar aus folgenden Gründen:

Die am stärksten erleuchtete Stelle bb' der Cylinderoberfläche würde dem sie beschauenden Auge stets auch als die hellste erscheinen, welche Stellung das Auge auch gegen die Cylinderfläche einnehmen mag, wenn die Natur der Oberfläche der Art wäre, dass sie alles auf sie fallende Licht unregelmässig zerstreute (diffundirt) und nicht den mindesten Antheil desselben regelmässig reflectirte.

Nehmen wir dagegen an, dass die Natur der Oberfläche von der Art ist, dass sie alle oder auch nur einen Theil der sie treffenden Strahlen regelmässig reflectirt, so muss nothwendig diejenige Stelle der krummen Oberfläche am hellsten erscheinen, welche die auf sie fallenden Sonnenstrahlen in der Richtung gegen das Auge hin zurückwirft. Nach einem

bekannten physikalischen Gesetze machen die einfallenden und die reflectirten Strahlen einen gleichen Winkel mit dem Einfallslothe, d. h. mit dem Perpendikel, welches man sich auf der krummen Oberfläche in dem Punkte errichtet denken kann, in welchem sie von dem einfallenden Strahl getroffen wird.

Im Aufriss wird offenbar diejenige Stelle der Säulenfläche am hellsten erscheinen müssen, welche die sie treffenden Strahlen gerade nach vorne, also in einer Richtung reflectirt, deren Horizontalprojection rechtwinkelig zur Grundlinie ist.

Denken wir uns im Grundriss der cylindrischen Säule Fig. 10 durch M eine Linie MN rechtwinkelig zur Grundlinie gezogen und alsdann den Winkel BMN halbt, so trifft die Halbierungslinie die Horizontalprojection der Mantelfläche in dem Punkte p .

Denken wir uns auf der Mantelfläche des Cylinders parallel mit der Axe desselben eine vertikale Linie gezogen, deren Horizontalprojection p ist, so werden alle Sonnenstrahlen, welche den Cylinder in irgend einem Punkte dieser Linie treffen, alle Strahlen also, deren Horizontalprojection xp ist, nach einer Richtung reflectirt, deren Horizontalprojection py rechtwinkelig auf der Senkfläche steht. Diese in p des Grundrisses zum Punkt verkürzt erscheinende Gerade bildet also für den vor der Senkfläche stehenden Beschauer die Glanzlinie des Cylinders, von welcher aus nach beiden Seiten hin die Helligkeit abnimmt, mit welcher sie dem Auge erscheint.

Ob also die hellste Stelle des Cylindermantels in bb' sich befindet oder auf der durch p gelegten Vertikalen hängt von der Natur der Oberfläche ab, nämlich davon, ob diese Oberfläche die sie treffenden Strahlen vorzugsweise unregelmässig zerstreut oder ob sie einen namhaften Theil derselben regelmässig reflectirt.

Zieht man im Aufriss der Fig. 15, Tab. VII parallel mit der Vertikalprojection der Sonnenstrahlen eine gerade Linie durch den Mittelpunkt der Kugel, so trifft dieselbe den als Ellipse erscheinenden grössten Kreis $ABCD$ in dem Punkte S . Dieser Punkt S ist derjenige, in welchem die Oberfläche der Kugel rechtwinkelig von den Sonnenstrahlen getroffen wird. Dieser Punkt wird also auch als der hellste der Kugeloberfläche erscheinen, von welcher Seite her man sie auch betrachten mag, wenn sie alle sie treffenden Sonnenstrahlen unregelmässig zerstreut; dagegen wird sich auf der Kugeloberfläche ein Glanzpunkt bilden, welcher von S aus weiter gegen den Wendeschatten hin liegt, wenn auf der Kugeloberfläche eine namhafte Reflexion der Sonnenstrahlen stattfindet.

- 39 **Schlagschatten in perspectivischen Bildern.** Um die Schlagschatten in perspectivischen Bildern zu erhalten, seien es nun parallel-perspectivische oder malerisch-perspectivische, kann man jederzeit so verfahren, dass man die Schlagschatten in Grund- und Aufriss construirt und sie danach in das perspectivische Bild überträgt. Bei malerisch-perspectivischen Zeichnungen ist dies jedenfalls am zweckmässigsten, weil man eine übermässige Anzahl von Constructionslinien ziehen müsste, welche nachher doch wieder ausgewischt werden müssen, wenn man die Schlagschatten direct im perspectivischen Bilde construiren wollte.

Einfacher gestaltet sich die Construction der Schlagschatten in parallel-perspectivischen (schiefwinkligen Projections-) Bildern, welche wir noch etwas näher betrachten wollen.

Um den Schatten eines Körpers in dem schiefwinkligen Projectionsbilde construiren zu

können, muss vor allen Dingen die Richtung der Sonnenstrahlen bestimmt sein, was dadurch geschieht, dass man erstens die schiefwinkelige Projection eines beliebigen Sonnenstrahls, und zweitens die schiefwinkelige Projection der geraden Linie angiebt, in welcher eine durch jenen Sonnenstrahl gelegte Vertikalebene irgend eine horizontale Ebene schneidet.

Diese beiden Linien im schiefwinkeligen Projectionsbilde spielen hier dieselbe Rolle wie die Horizontal- und Vertikalprojection eines Sonnenstrahls bei Schattenconstructionen im Grund- und Aufriss.

Fig. 20 auf Tab. IX stellt z. B. das schiefwinkelige Projectionsbild einer Pyramide von quadratischer Basis dar, welche auf einer Ecksäule aufsitzt, deren horizontaler Querschnitt ein der Basis der Pyramide gleiches Quadrat ist. Es soll der Schatten construirt werden, welchen dieser Körper auf die horizontale Bodenfläche wirft, auf welcher er steht.

Die Richtung der Sonnenstrahlen in diesem schiefwinkeligen Projectionsbilde sei RT . Eine durch die Linie RT gelegte Vertikalebene schneidet die horizontale Bodenfläche in einer Geraden, welche im schiefwinkeligen Projectionsbilde die Lage $R'T'$ haben mag.

Durch diese beiden Angaben ist die Richtung der Sonnenstrahlen fest bestimmt, und danach die verlangte Schattenconstruction ausführbar.

Um den Schatten zu finden, welchen die Pyramidenspitze S auf die Bodenfläche wirft, fälle man zunächst von S ein Perpendikel auf diese Bodenfläche, welches sie im Fusspunkt S' trifft: Zieht man nun durch S eine Linie parallel mit RT , durch S' eine zweite parallel mit $R'T'$, so ist der Punkt s , in welchem diese beiden Linien sich schneiden, der gesuchte Schatten der Pyramidenspitze S .

Um den Schatten des Punktes F zu finden, verfährt man ganz in derselben Weise: man zieht durch F eine Gerade parallel mit RT , durch den Fusspunkt B des von F auf die Bodenfläche gefällten Perpendikels eine Linie parallel mit $R'T'$, so ist der Punkt f , in welchem diese beiden Linien sich schneiden, der Schatten, welchen der Punkt F auf die Bodenfläche wirft, und Bf ist der Schatten der Kante BF .

Eine von f nach s gezogene Gerade ist der Schatten der Pyramidenkante FS .

Um den Schatten der Pyramidenkante GS zu finden, hat man den Schatten g des Punktes G zu suchen, und dann von g nach s eine Linie zu ziehen.

Der Schatten, welchen der Körper Fig. 20 auf die Bodenfläche wirft, ist durch die Linien Bf , fs , sg und gD begrenzt. Ein Theil dieses Schattens erscheint aber in unserer Figur verdeckt.

Fig. 21 auf Tab. IX stellt das schiefwinkelige Projectionsbild einer Pyramide von quadratischer Basis dar, welche ihre Schatten theils auf die horizontale Bodenfläche, theils auf die vertikale Fläche $EFGH$, theils endlich auf die schräge Fläche $HGKJ$ wirft.

Um diesen Schatten zu construiren, suche man zunächst nach dem in Fig. 20 erläuterten Verfahren den Schatten s , welchen die Pyramidenspitze S auf die horizontale Bodenfläche werfen würde, wenn er nicht schon vorher aufgefangen würde.

Zieht man die Linien Bs und Ds , so findet man die Punkte o und n , in welchen die Kante FE von dem Schatten der Kanten BS und DS getroffen wird.

Denken wir uns die vertikale Wand $EFGH$ nach oben verlängert, so ist es leicht, den Punkt s'' dieser verlängerten Ebene zu finden, auf welchen der Schatten der Pyramidenspitze fallen würde. Die Horizontalprojection $S's$ des Sonnenstrahls Ss trifft nemlich die Kante

EF im Punkte t . Eine durch t gezogene Vertikallinie ist nun offenbar die Linie, in welcher die durch EF gelegte Vertikalebene von der Vertikalebene des Sonnenstrahls Ss geschnitten wird. Der Schatten also, welchen die Pyramidenspitze auf die Vertikalebene von EF werfen würde, wenn dieselbe hoch genug wäre, ist also der Durchschnittspunkt s'' der durch t gezogenen senkrechten Linie mit dem Sonnenstrahl Ss .

Zieht man die Linien ns'' und os'' , so erhält man die Punkte p und q , in welchen die Kante HG von dem Schatten der Pyramidenkanten BS und DS getroffen wird.

Es bleibt nun noch übrig den Punkt s' zu ermitteln, in welchem der Schatten der Pyramidenspitze S die schräge Fläche $HGKJ$ wirklich trifft.

Zu diesem Zweck müssen wir die gerade Linie ermitteln, in welcher die Ebene $HGKJ$ von der Vertikalebene des Sonnenstrahls Ss geschnitten wird.

Der eine Endpunkt dieser Durchschnittslinie ist der Punkt u , in welchem die Kante HG von der durch t gezogenen Vertikallinie geschnitten wird.

Einen anderen Punkt v dieser Durchschnittslinie findet man auf folgende Weise. Ein von K auf die Bodenfläche gefällttes Perpendikel trifft dieselbe in K' . Eine durch K' parallel mit KJ gezogene Gerade $K'J'$ wird von $S's$ im Punkte x geschnitten, und eine durch x gezogene Vertikale ist offenbar die Durchschnittslinie der senkrechten Ebene $JKK'J'$ mit der Vertikalebene des Sonnenstrahls Ss . Diese durch x gelegte Vertikallinie trifft die Kante JK im Punkte v , und dieser Punkt v ist also offenbar derjenige, in welchem die Kante JK von der Vertikalebene des Sonnenstrahls Ss geschnitten wird.

Demnach ist endlich auch die Gerade uv die Durchschnittslinie der Ebene $HGKJ$ mit der Vertikalebene des Sonnenstrahls Ss .

Der Schatten, welchen S auf die Fläche $HGKJ$ wirft, ist aber offenbar der Durchschnittspunkt s' der Linien uv und Ss .

Nach s' hat man nur noch die Linien ps' und qs' zu ziehen, um die Gränzlinien des Schattens zu finden, welchen der obere Theil der Pyramide auf die schräge Fläche $HGJK$ wirft.

Diese Beispiele werden genügen um zu zeigen, wie sich die für Grund- und Aufriss erläuterten Principien der Schattenconstruction ohne Schwierigkeit auch auf die Schattenconstruction im schiefwinkligen Projectionsbild übertragen lassen.

Um die Schattenconstruction in schiefwinkligen Projectionsbildern einzuüben, bieten die Tafeln zur zweiten Abtheilung dieses Werkes genügendes Material.

Die physikalische Technik

oder
Anleitung zur Anstellung von physikalischen
Versuchen

und zur
Herstellung von physikalischen Apparaten mit
möglichst einfachen Mitteln.

Von
Dr. Joseph Frick,
Grossherzoglich Badischem Oberschulrathe, Ritter des Zähringer
Löwen-Ordens.

Vierte vermehrte und verbesserte Auflage.
Mit 986 in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8.
Fein Velinpap. geh. Preis 3 Thlr. 15 Sgr.

Kurzes Lehrbuch der Chemie

nach den
neuesten Ansichten der Wissenschaft.

Von
H. E. Roscoe,
Professor der Chemie am Owens College, Manchester.
Deutsche Ausgabe,
unter Mitwirkung des Verfassers bearbeitet
von
Carl Schorlemmer.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen und
einer Spectraltafel.
**Vierte, nach den neuesten Forschungen vermehrte und
verbesserte Auflage.**
8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr. 25 Sgr.

Lehrbuch der Kohlenstoffverbindungen

oder der
organischen Chemie.

Von
Carl Schorlemmer.
Zugleich als zweiter Band
von
Roscoe's kurzem Lehrbuch der Chemie.
Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. 8. Fein
Velinpap. geh. Preis 2 Thlr. 25 Sgr.

Lehrbuch der physikalischen Mechanik

von
Dr. Heinrich Buff,
Professor der Physik an der Universität Giessen.
In zwei Theilen.
Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen.
Erster Theil.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 2 Thlr. 15 Sgr.
Zweiter Theil.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Erste Abtheilung. Preis 2 Thlr.

Die Spectralanalyse

in einer Reihe von sechs Vorlesungen mit wissenschaft-
lichen Nachträgen

von
H. E. Roscoe.
Autorisirte deutsche Ausgabe,
bearbeitet von
Carl Schorlemmer.
Zweite vermehrte Auflage.

Mit 80 in den Text eingedruckten Holzstichen, Chromo-
lithographien, Spectraltafeln etc.
gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 3 Thlr.

Die Wärme

betrachtet als eine Art der Bewegung
von

John Tyndall,
Mitglied der Royal Society, Professor der Physik an der Royal
Institution und an der Bergwerksschule zu London.
Autorisirte deutsche Ausgabe, herausgegeben durch
H. Helmholtz und G. Wiedemann
nach der vierten Auflage des Originals.
Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen und
einer Tafel.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 3 Thlr.

Der Constructeur.

Ein Handbuch zum Gebrauch beim Maschinen-Entwerfen.
Für

Maschinen- und Bau-Ingenieure, Fabrikanten und
technische Lehranstalten.

Von
F. Reuleaux,
Professor,
Director der Königl. Gewerbe-Akademie in Berlin.
Dritte, sorgsam durchgearbeitete und erweiterte Auflage.
Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8.
Fein Velinpap. geh. Preis 4 Thlr. 24 Sgr.

Einleitung in die theoretische Physik

von
Viktor von Lang,
Professor der Physik an der Universität Wien.
Mit in den Text eingedruckten Holzstichen.
gr. 8. Fein Velinpap. geh.
**Erstes Heft: Mechanik, Schwere, Magnetismus und
Elektricität.** Preis 1 Thlr. 5 Sgr.
Zweites Heft: Licht. Preis 1 Thlr.
**Drittes Heft: Feste Körper, Flüssigkeiten, Gase,
mechanische Wärmetheorie. (Schluss.)**
Preis 1 Thlr. 6 Sgr.

Die Schule
der
Elementar-Mechanik und Maschinenlehre
für den Selbstunterricht

angehender Techniker, Mechaniker, Industrieller, Land-
wirthe, Bergmänner, Architekten, Bauhandwerker, Werk-
führer, Mühlen- und Fabrikbesitzer

sowie für

Gewerbe- und Realschulen.

Zum Theil nach Delaunay's Cours élémentaire de
Mécanique

frei bearbeitet von

Dr. H. Schellen,

Director der Realschule erster Ordnung zu Cöln, Ritter des rothen Adler-
Ordens vierter Klasse, Mitglied mehrerer gelehrter Gesellschaften.

In zwei Theilen.

Mit 837 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Dritte verbesserte Auflage.

8. Fein Velinpapier. geh. Preis 3 Thlr.

Siebenstellige gemeine Logarithmen

der Zahlen von 1 bis 108000

und der

Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten
aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Secunden
nebst einer

Interpolationstafel zur Berechnung der Propor-
tionaltheile.

Von

Dr. Ludwig Schrön,

Director der Sternwarte und Professor zu Jena, Mitglieder der Kaiserlich
Leopold. Carolin. deutschen Akademie der Naturforscher und der gelehrten
Gesellschaften zu Breslau, Frankfurt a. M., Halle und Jena.

Zwölfte revidirte Stereotyp-Ausgabe.

Imperial-Octav. geh.

Tafel I. und II. (Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen
Functionen.) Preis 1 Thlr. 7½ Sgr.

Tafel III. (Interpolationstafel, Supplement zu allen Logarithmen-
tafeln.) Preis 15 Sgr.

Ausserdem ist einzeln verkäuflich für Solche, welche Tafeln für
trigonometrische Rechnungen nicht nöthig haben:

Tafel I. (Logarithmen der Zahlen.) Preis 20 Sgr.

Anleitung

zum

Unterricht im Freihandzeichnen

mit

Rücksicht auf die Unterrichtsmethode

der Brüder

Ferdinand und Alexandre Dupuis

nebst einem Anhang:

„Vorschule der Perspective“

von

S. Fürstenberg,

Maler und Lehrer an der höheren Bürger- und Provinzial-Gewerbe-
schule zu Trier.

Mit 30 in den Text eingedruckten Holzstichen und 2 Tafeln.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 10 Sgr.

Lehrbuch der Mechanik

in

elementarer Darstellung

mit

Uebungen und Anwendungen auf Maschinen- und Bau-
Constructionen.

Für den Unterricht an Gewerbe- und Realschulen, sowie
zum Privatstudium, für angehende Maschinenbauer
und Architekten bearbeitet

von

Ad. Wernicke,

Königlichem Gewerbeschul-Director zu Gleiwitz, ordentl. Lehrer für Mathe-
matik, Mechanik und Maschinenlehre, Ehrenmitglied der Gewerbe-
vereine zu Görlitz und Schweidnitz.

In zwei Theilen.

Erster Theil.

Mechanik fester Körper.

Mit 405 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 2 Thlr.

Zweiter Theil.

Mechanik flüssiger Körper.

Mit 202 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 2 Thlr. 10 Sgr.

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit den nöthigen Hilfslehren aus der Analysis für den
Unterricht an technischen Lehranstalten, sowie
zum Gebrauch für Techniker

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

weil. Königl. Sächsischer Ober-Bergrath und Professor an der Sächsischen
Bergakademie zu Freiberg.

Fünfte verbesserte und vervollständigte Auflage

bearbeitet von

Gustav Herrmann,

Professor an der Königl. polytechnischen Schule zu Aachen.

In drei Theilen.

Jeder Theil mit etwa 800 bis 1000 in den Text eingedruck-
ten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh.

Erster Theil: **Theoretische Mechanik.** Fünfte verbesserte
und vervollständigte Auflage. Erste bis achte Lieferung. Preis
zusammen 4 Thlr. 20 Sgr.

Zweiter Theil: **Statik der Bauwerke und Mechanik der**
Umtriebsmaschinen. Vierte verbesserte und vervoll-
ständigte Auflage. Vollständig in 12 Lieferungen. Preis 4
Lieferung 15 Sgr.

Dritter Theil: **Die Mechanik der Zwischen- und Arbeits-**
maschinen. Zweite verbesserte und vervollständigte Auf-
lage. Erste und zweite Lieferung. Preis zusammen 1 Thlr.

Theoretische Astronomie

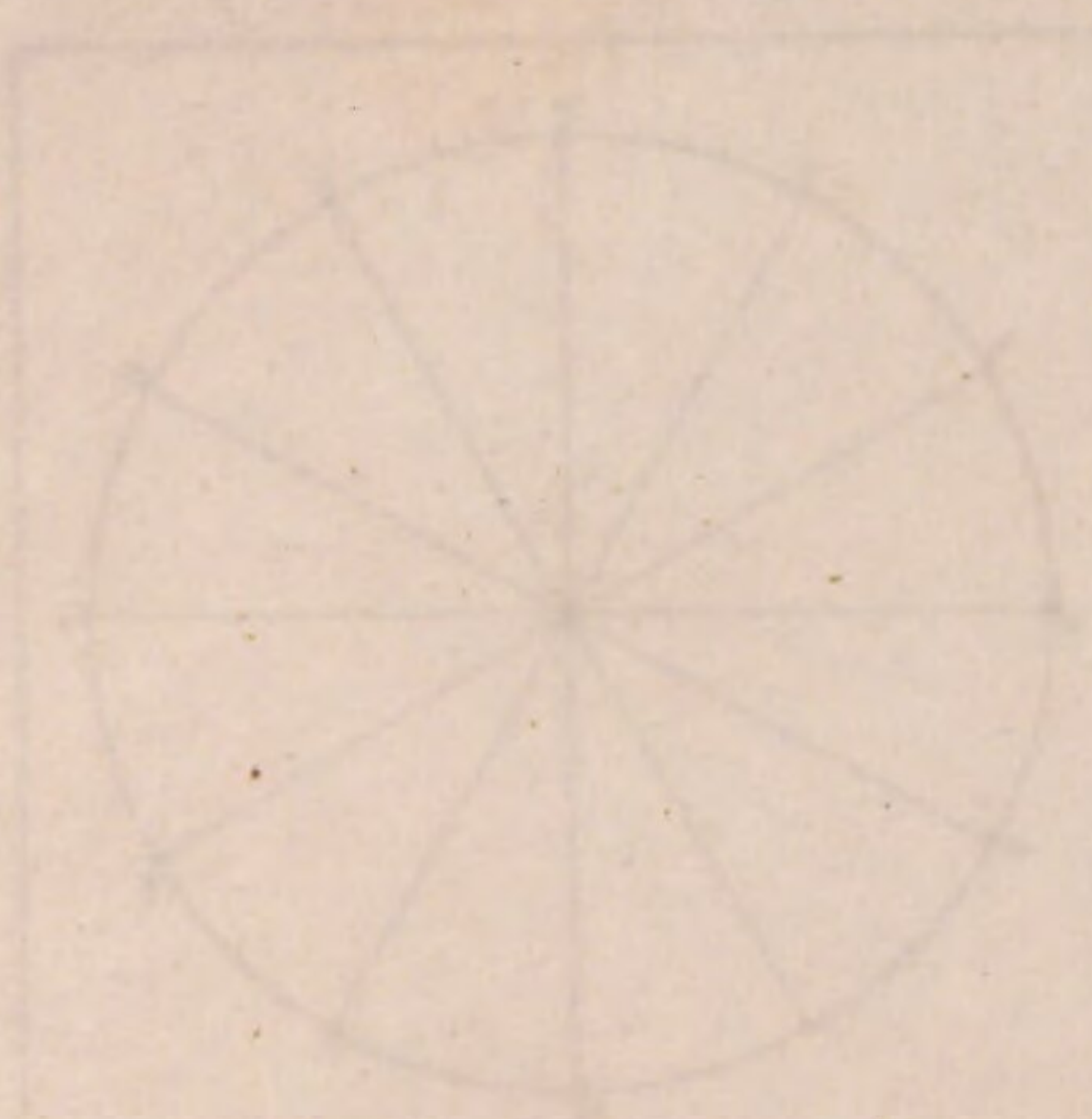
von

Dr. W. Klinkerfues,

Professor,

Director der Königlichen Sternwarte zu Göttingen.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 3 Thlr.



T A F E L N

ZUR

C O N S T R U C T I V E N

ZEICHNUNGS-LEHRE.

ZWEITER THEIL.

THE

CONSTITUTION

OF THE

UNITED STATES

T A F E L N

ZUR

C O N S T R U C T I V E N

ZEICHNUNGS-LEHRE

VON

DR. JOH. MÜLLER,
Professor zu Freiburg im Breisgau.

ZWEITER THEIL.

Z W E I T E A U F L A G E .

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1874.

Die Herausgabe einer Uebersetzung in französischer und englischer Sprache,
sowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

ZWEITES BUCH.

SCHIEFWINKELIGE PROJECTION

ODER

PARALLEL-PERSPECTIVE.

NEW YORK

SCHUBERT'S PIANO

PARALLEL-PRISMATIC

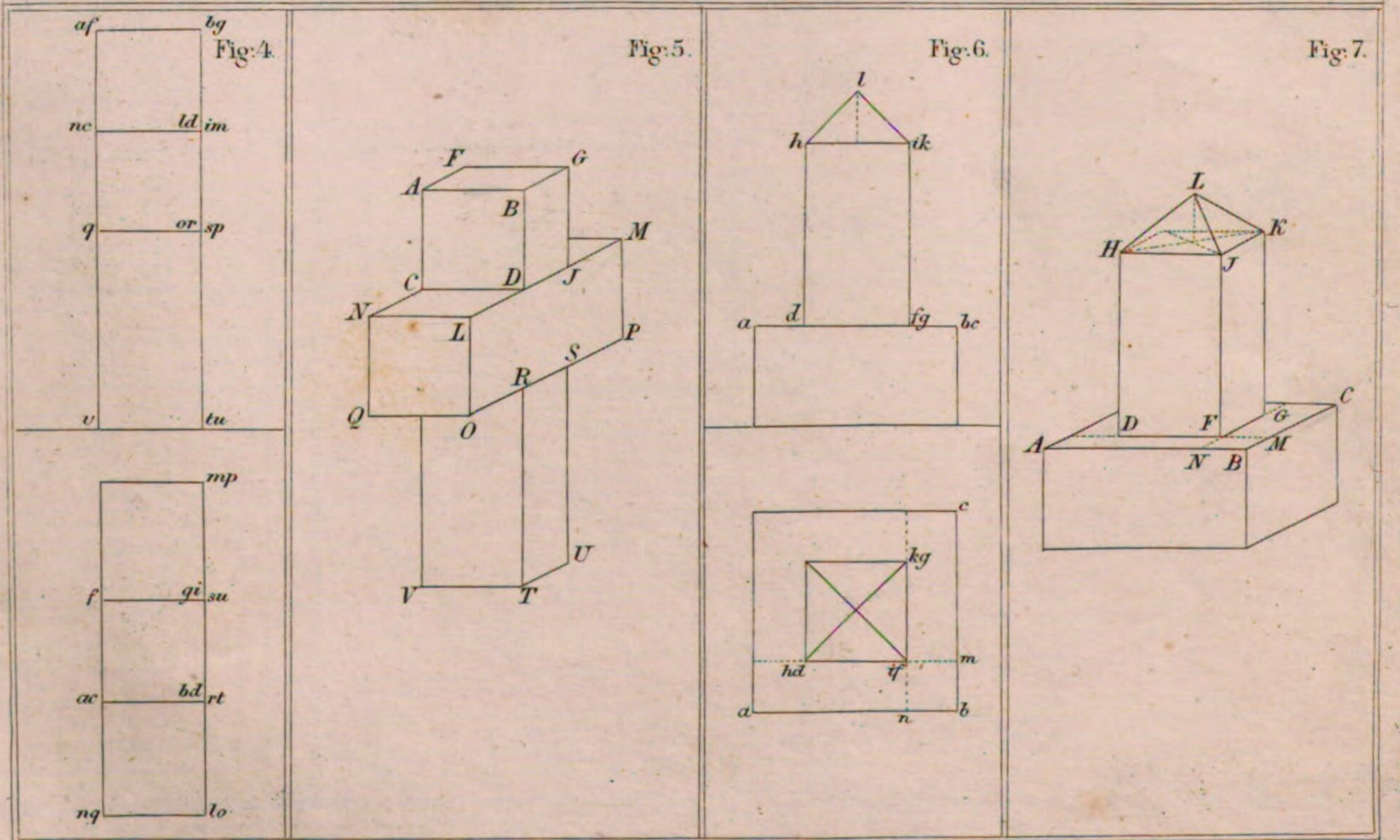
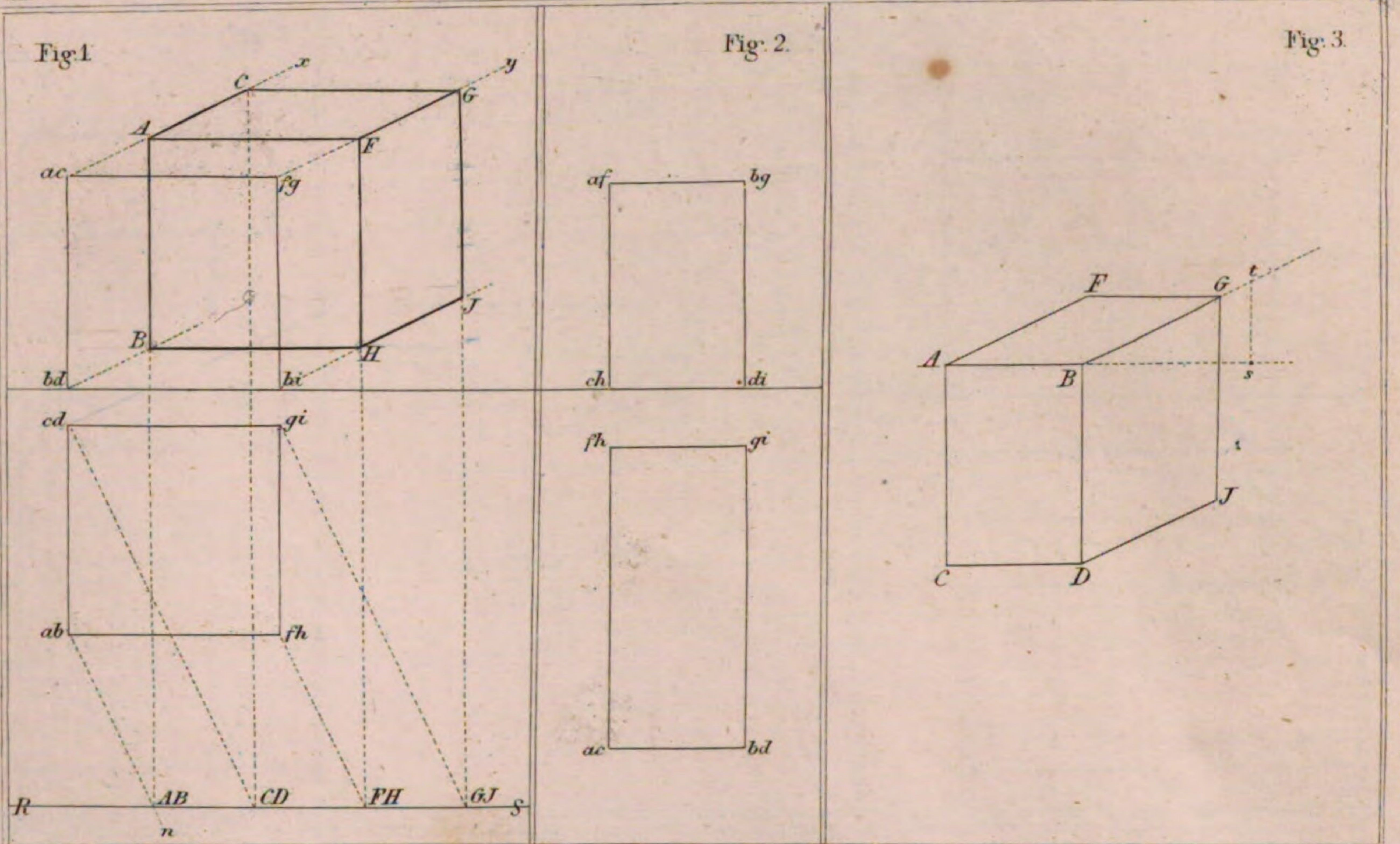


Fig. 8.

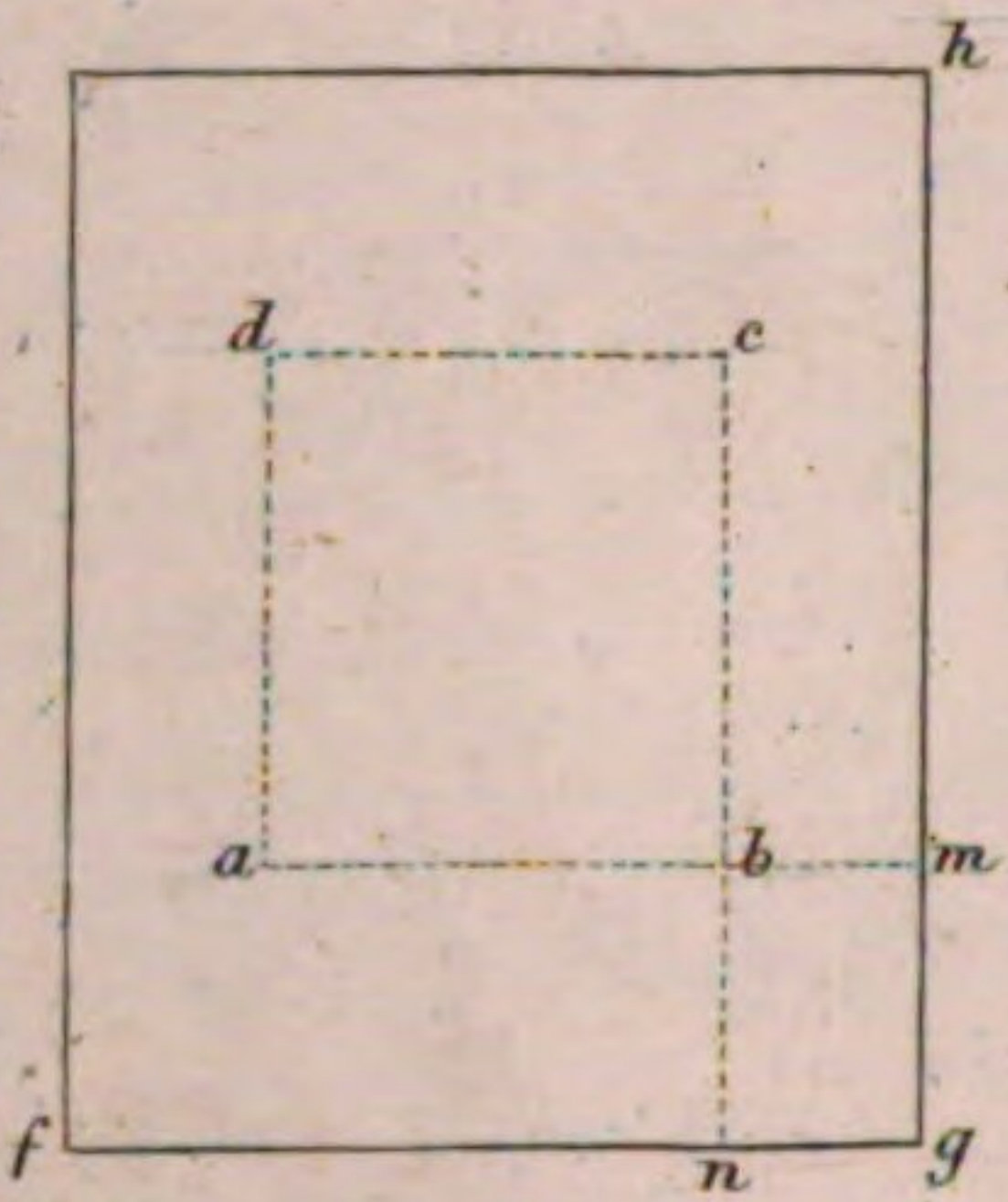
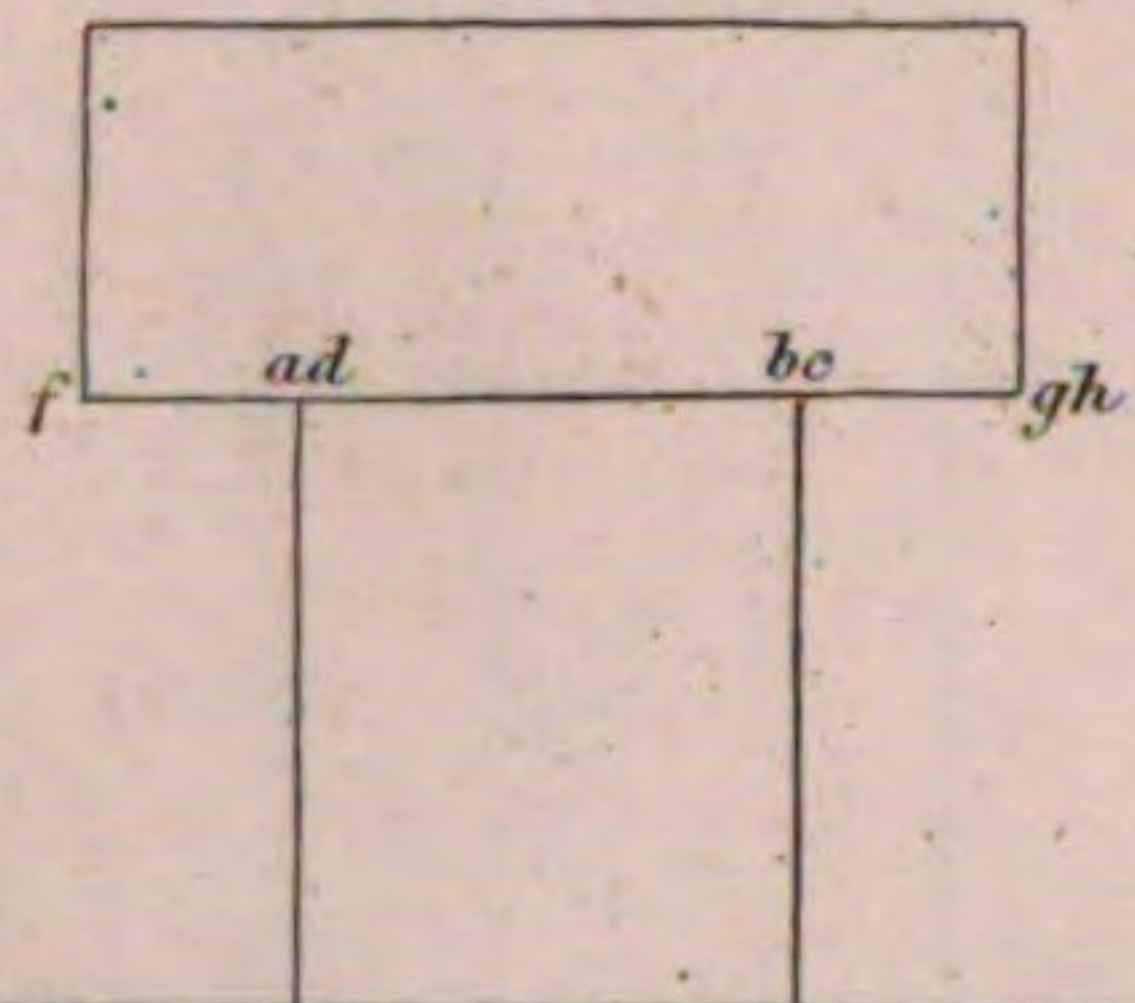


Fig. 9.

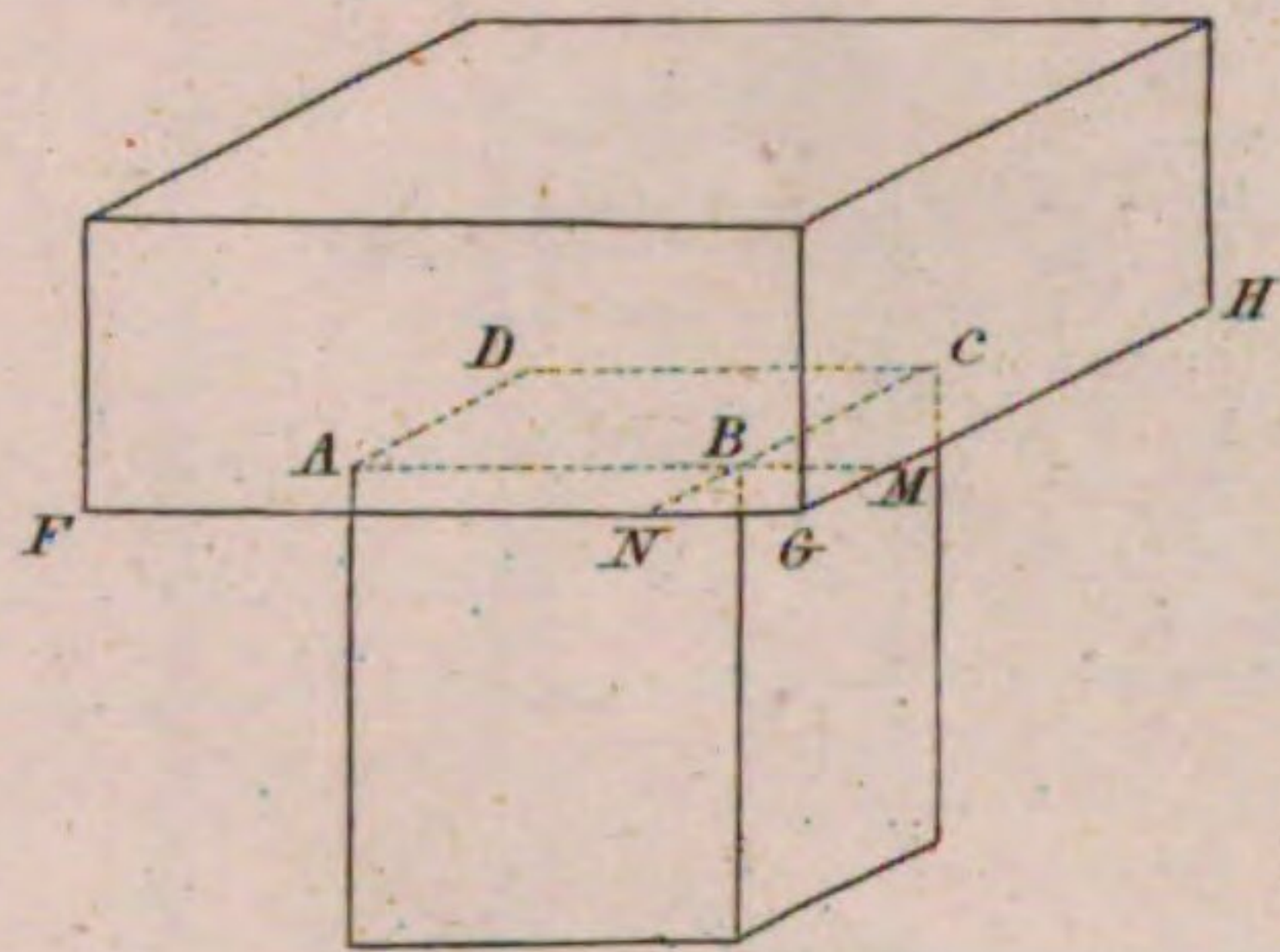


Fig. 10.

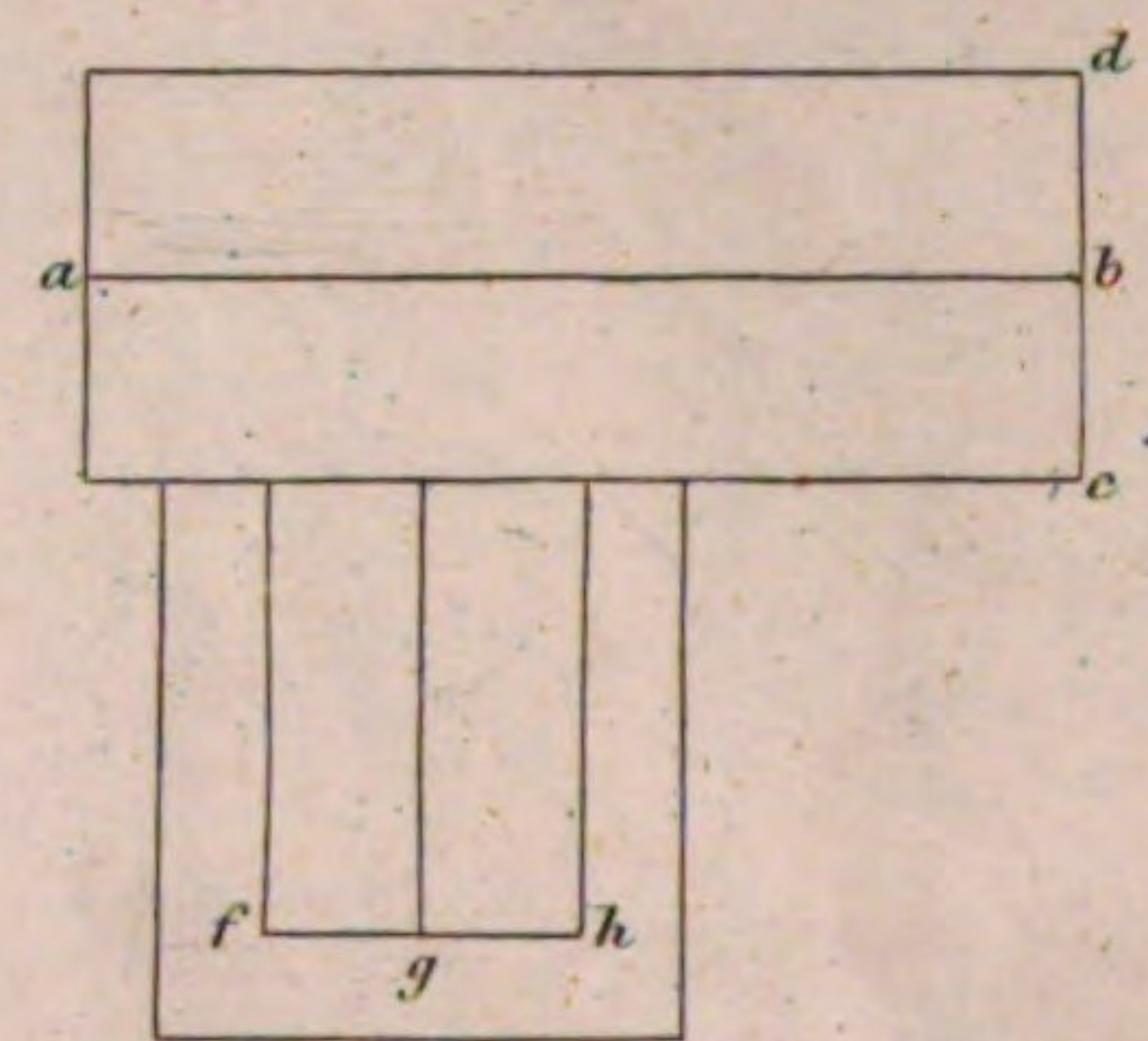
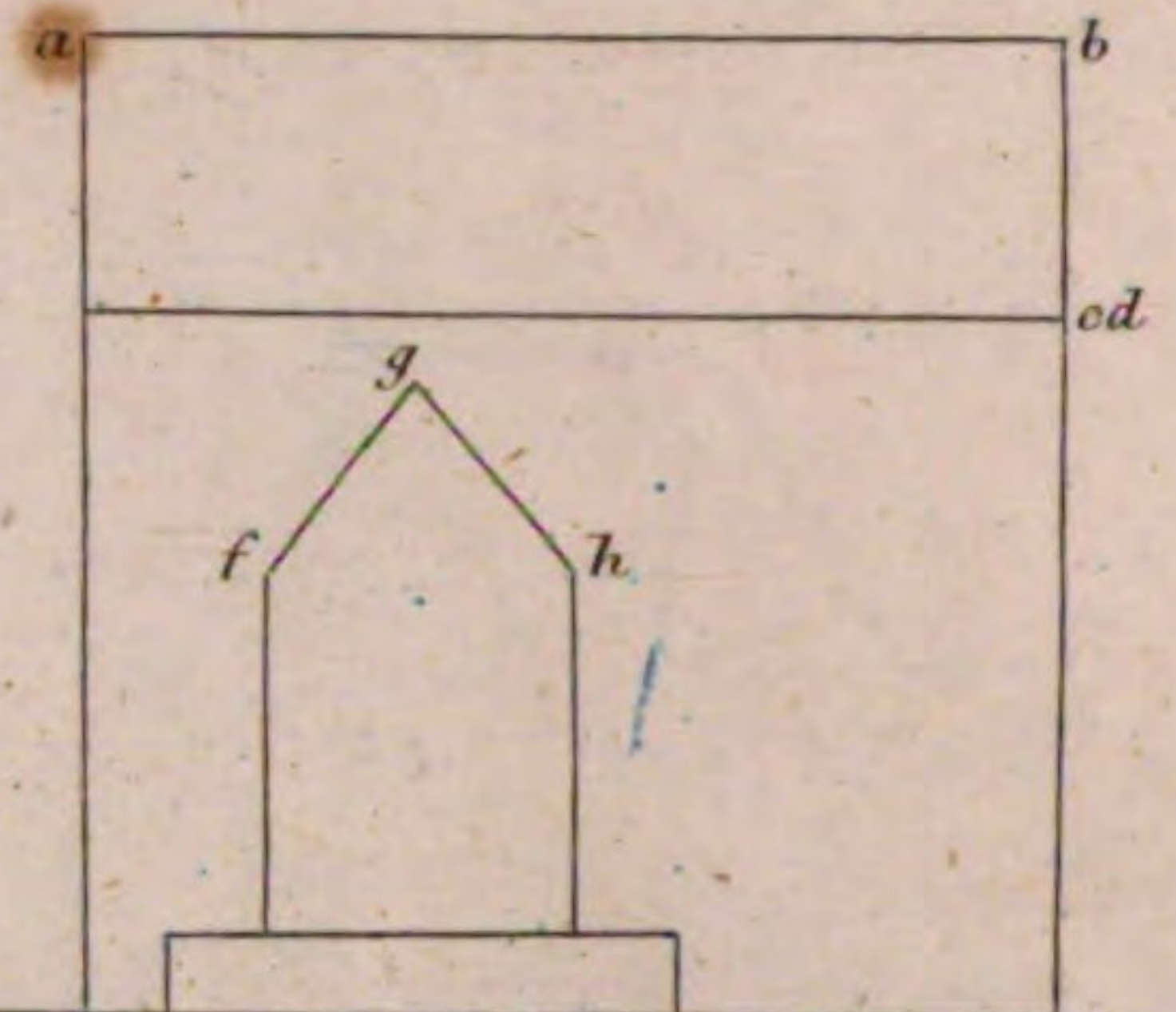


Fig. 11.

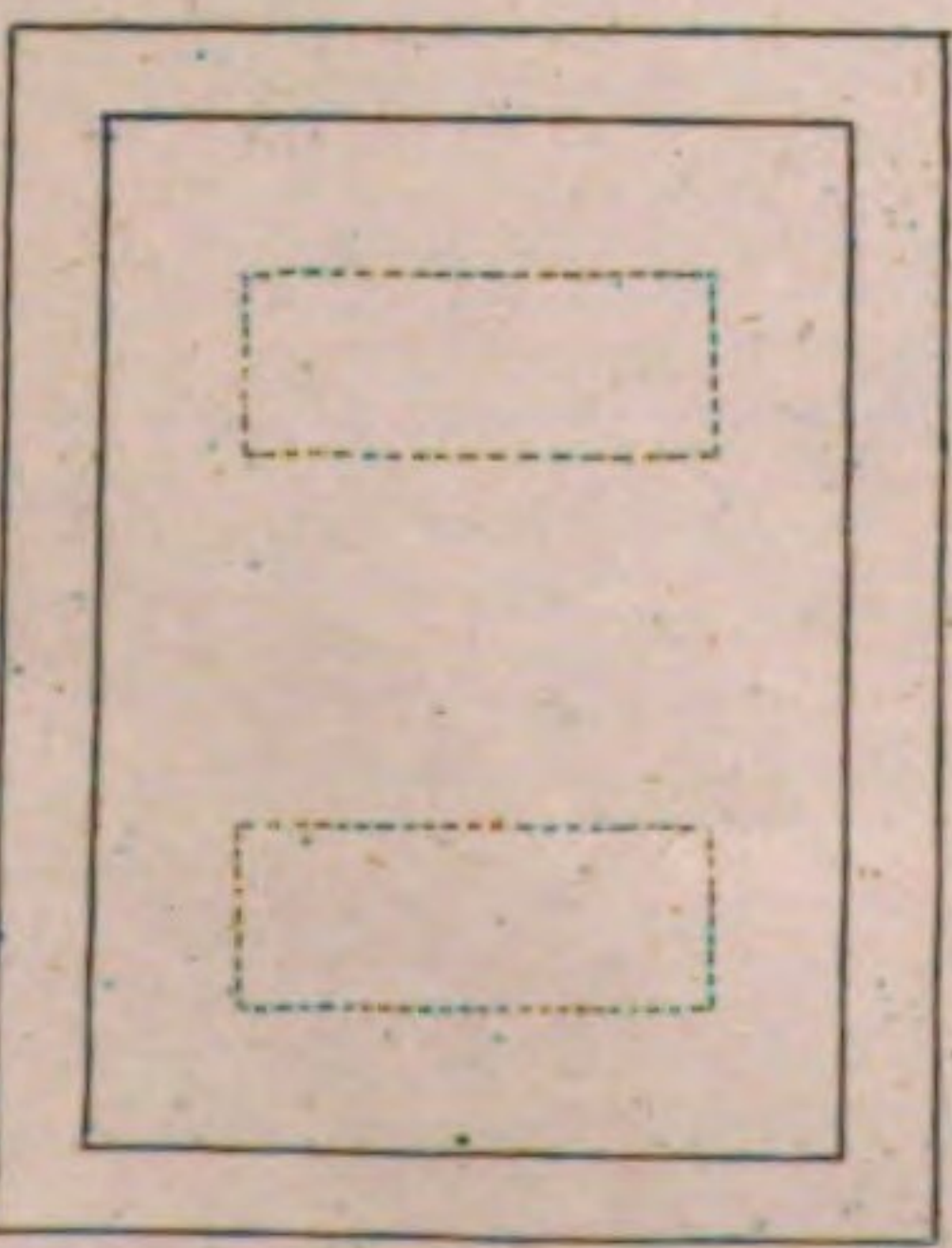
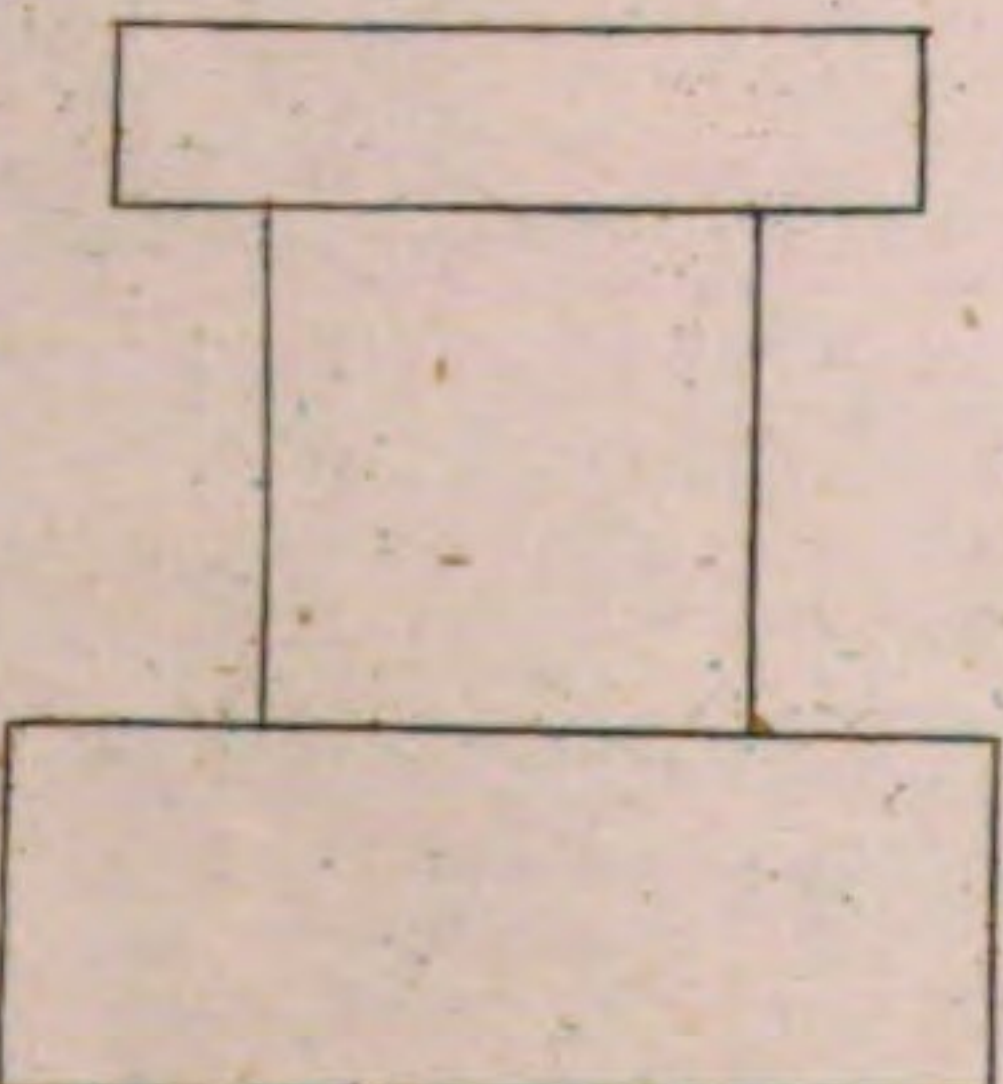


Fig. 12.

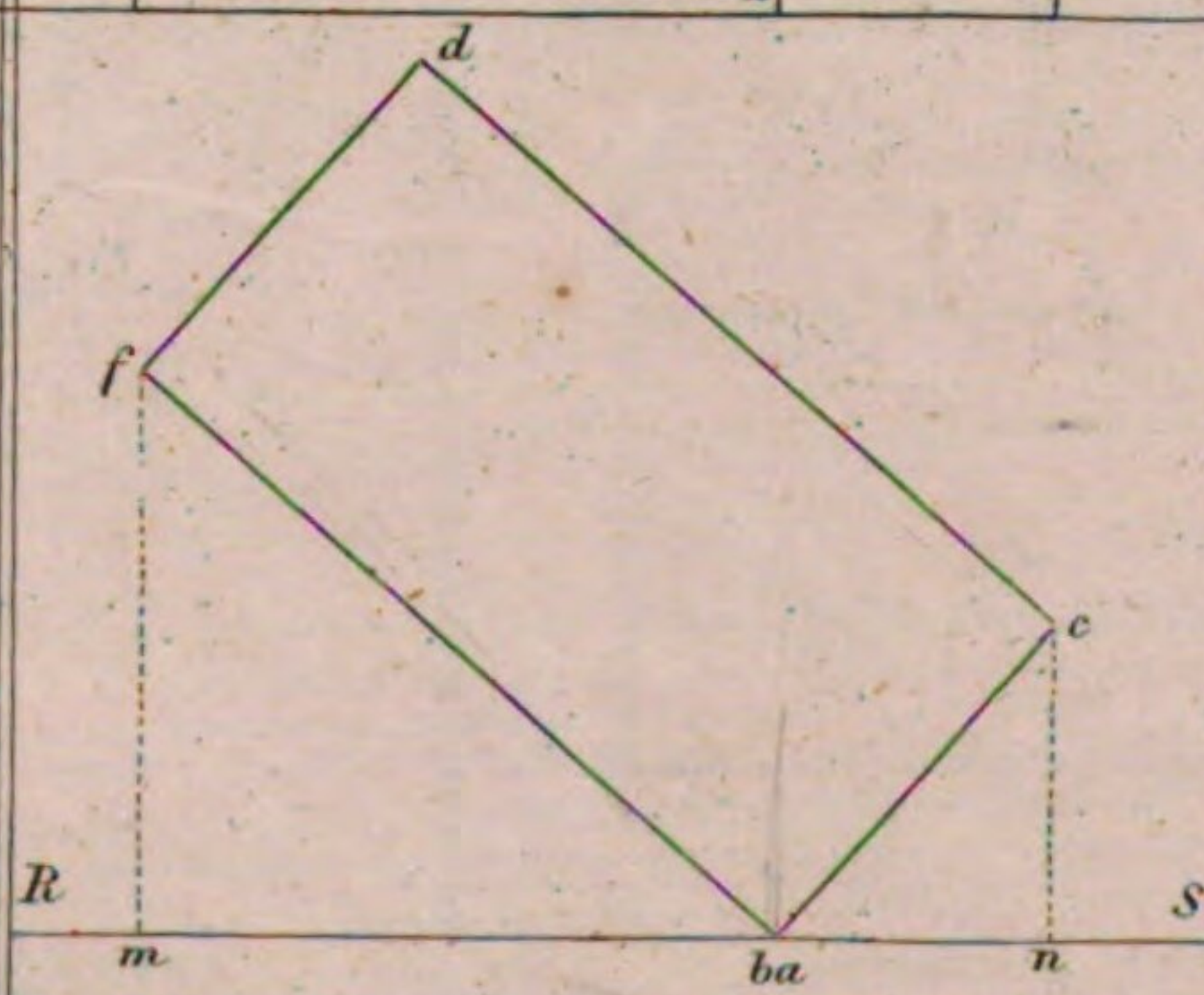
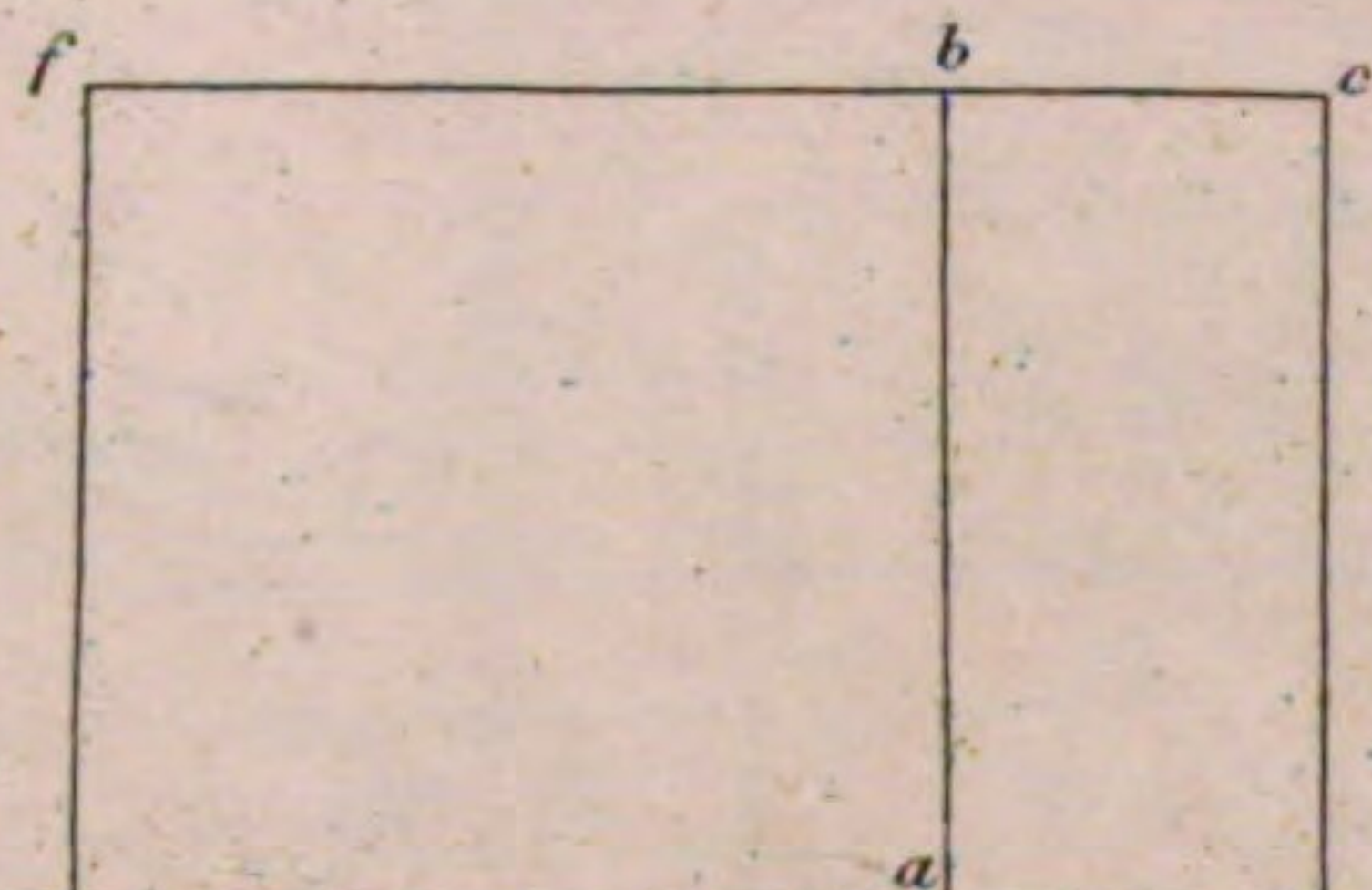


Fig. 13.

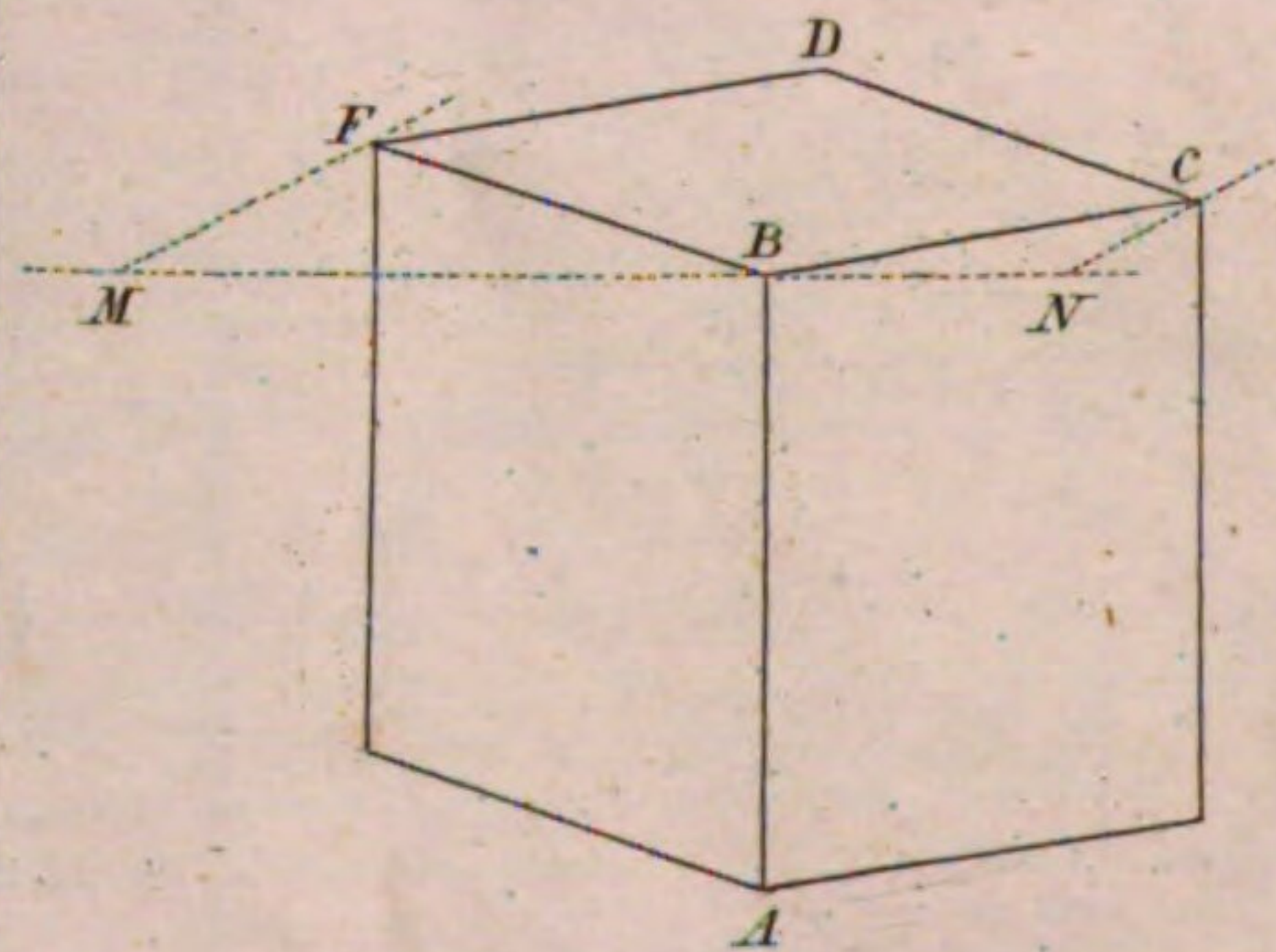


Fig. 14.

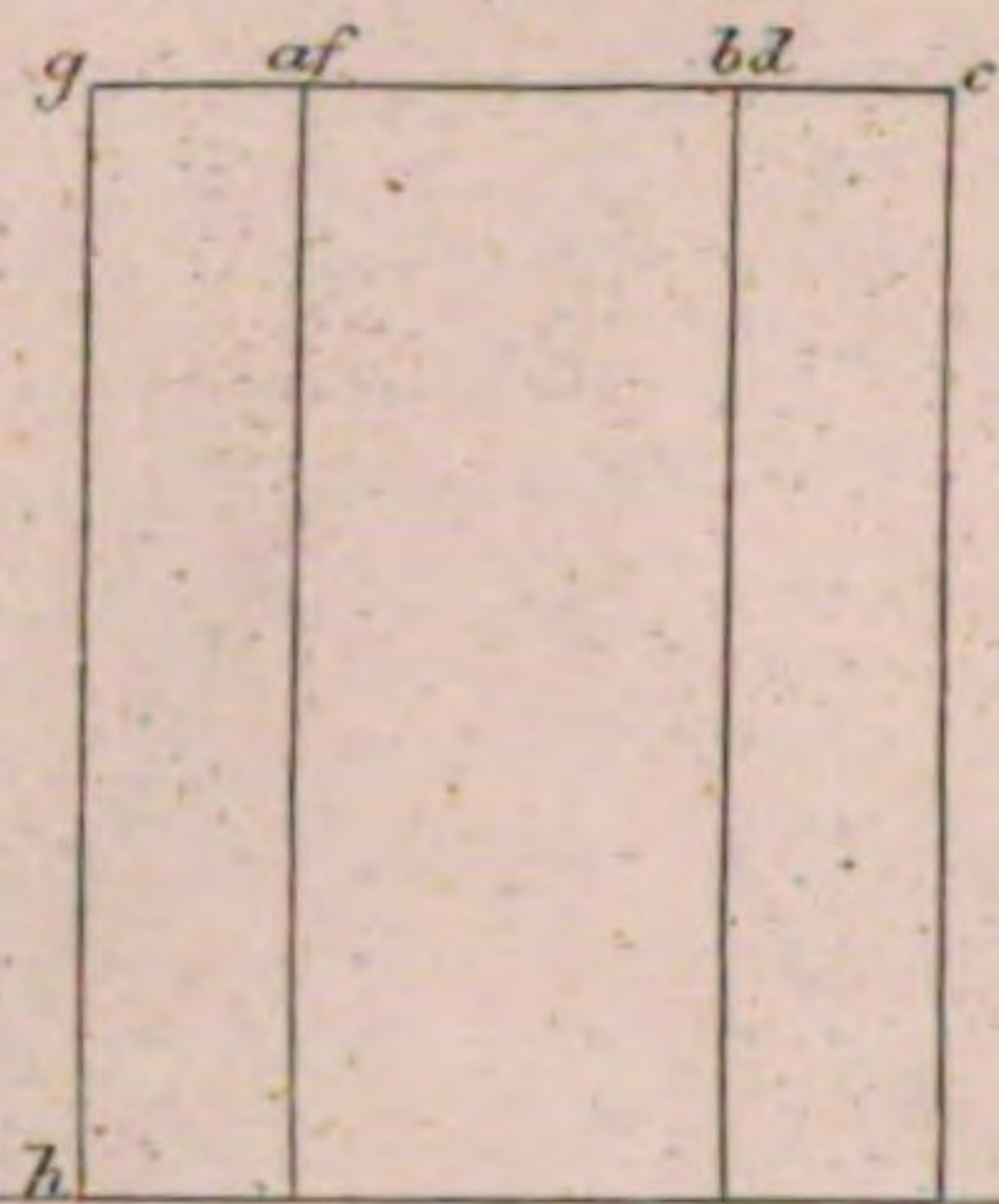


Fig. 15.

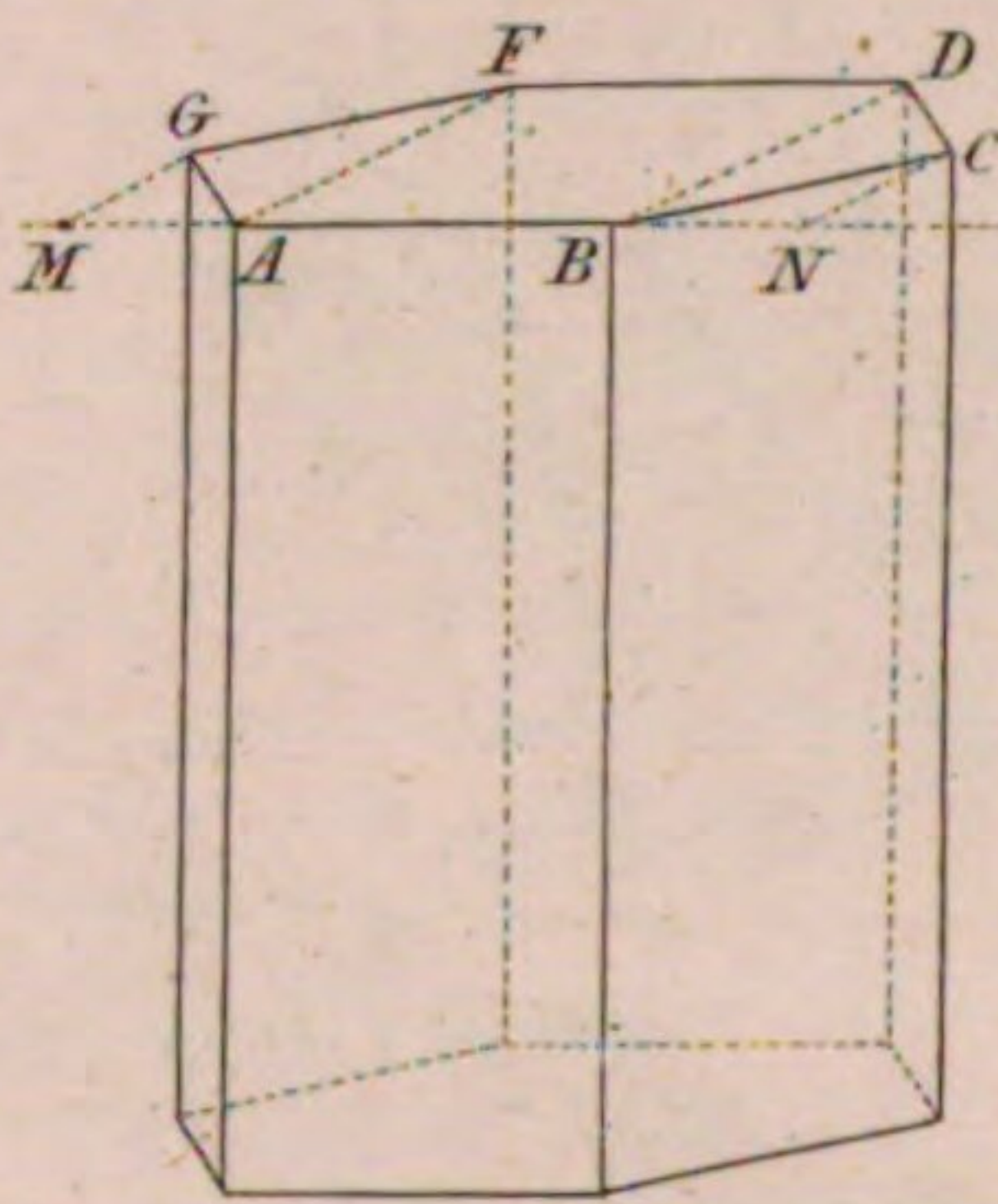


Fig. 16.

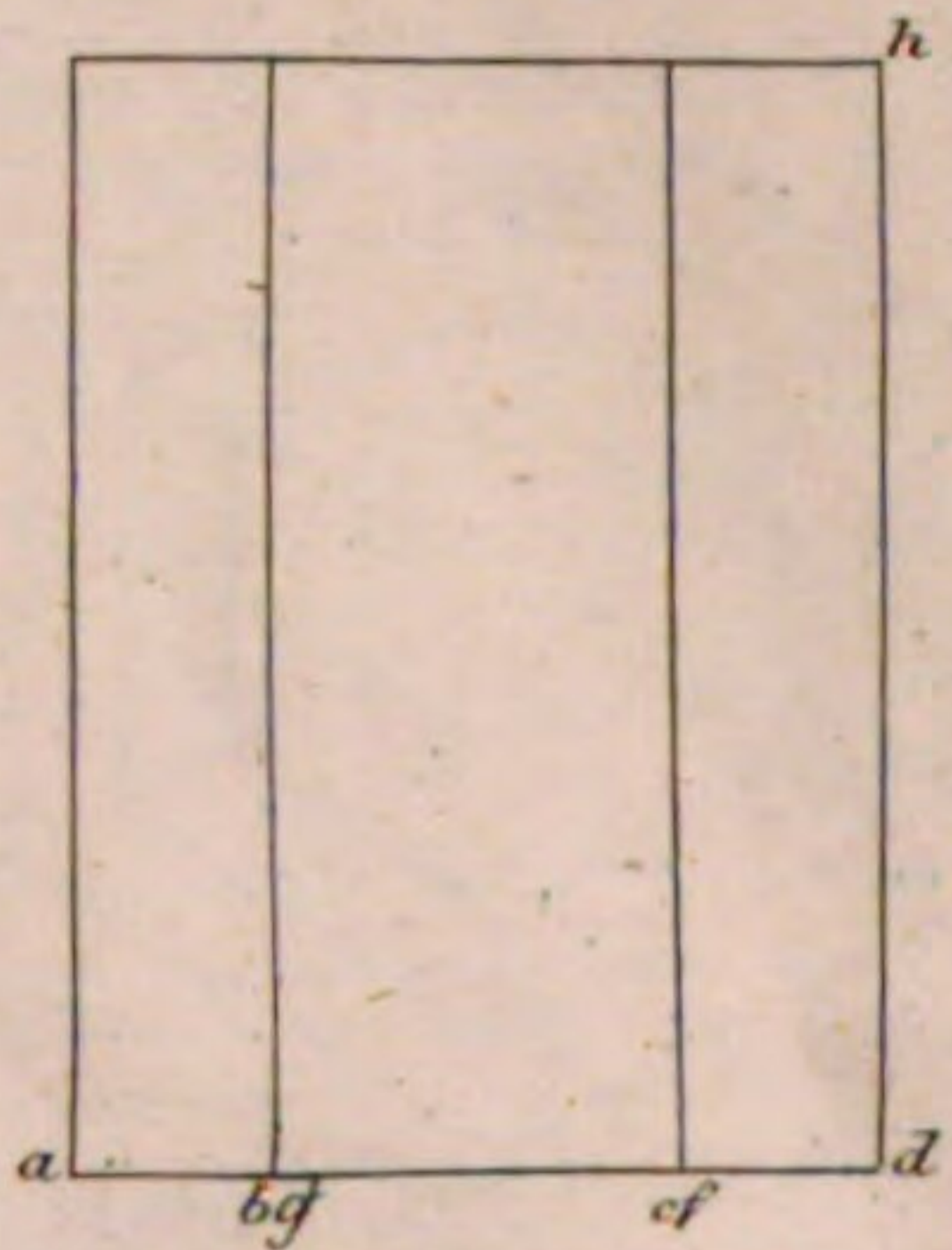
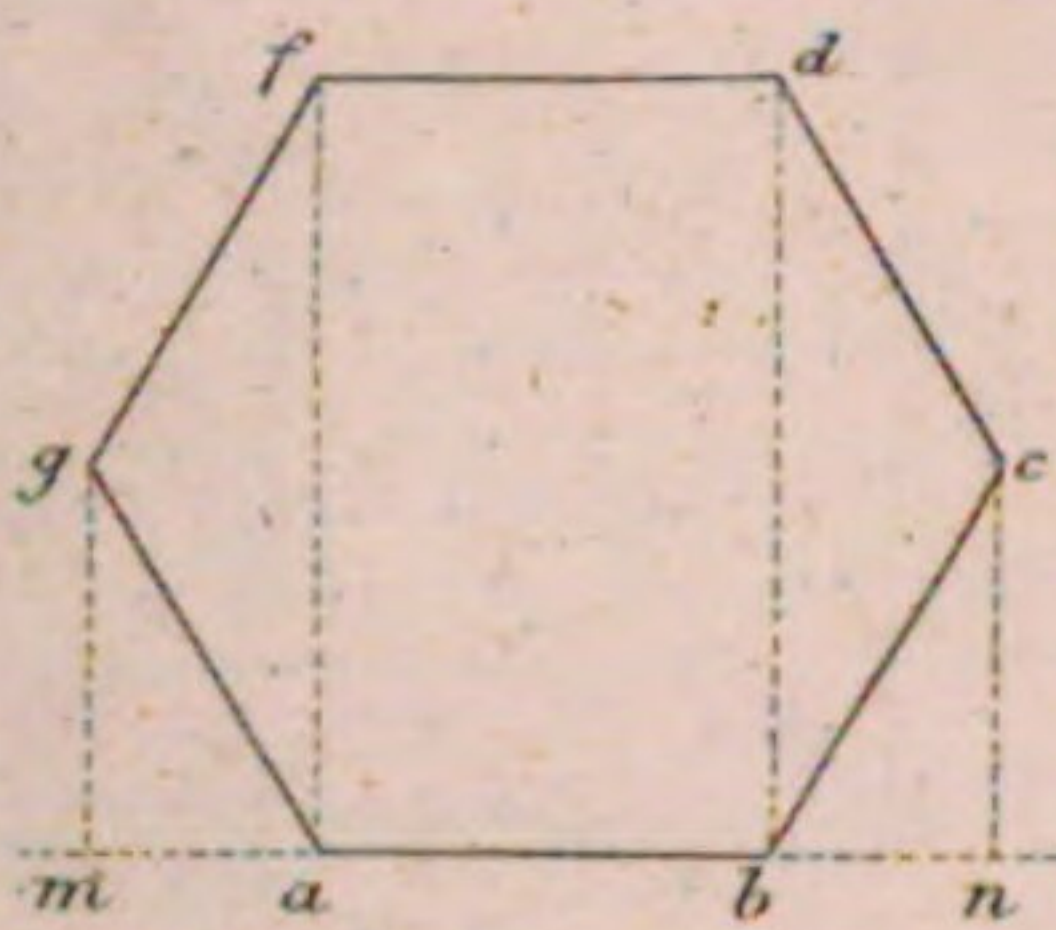
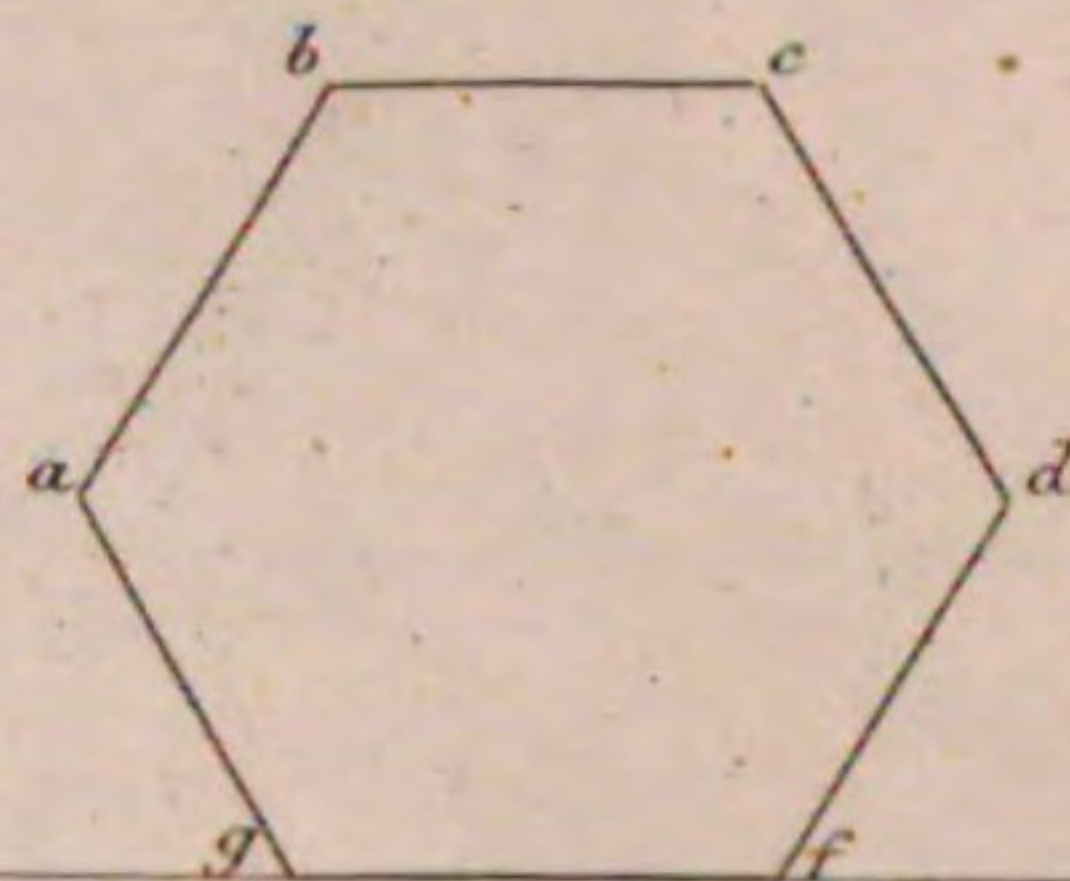


Fig. 17.

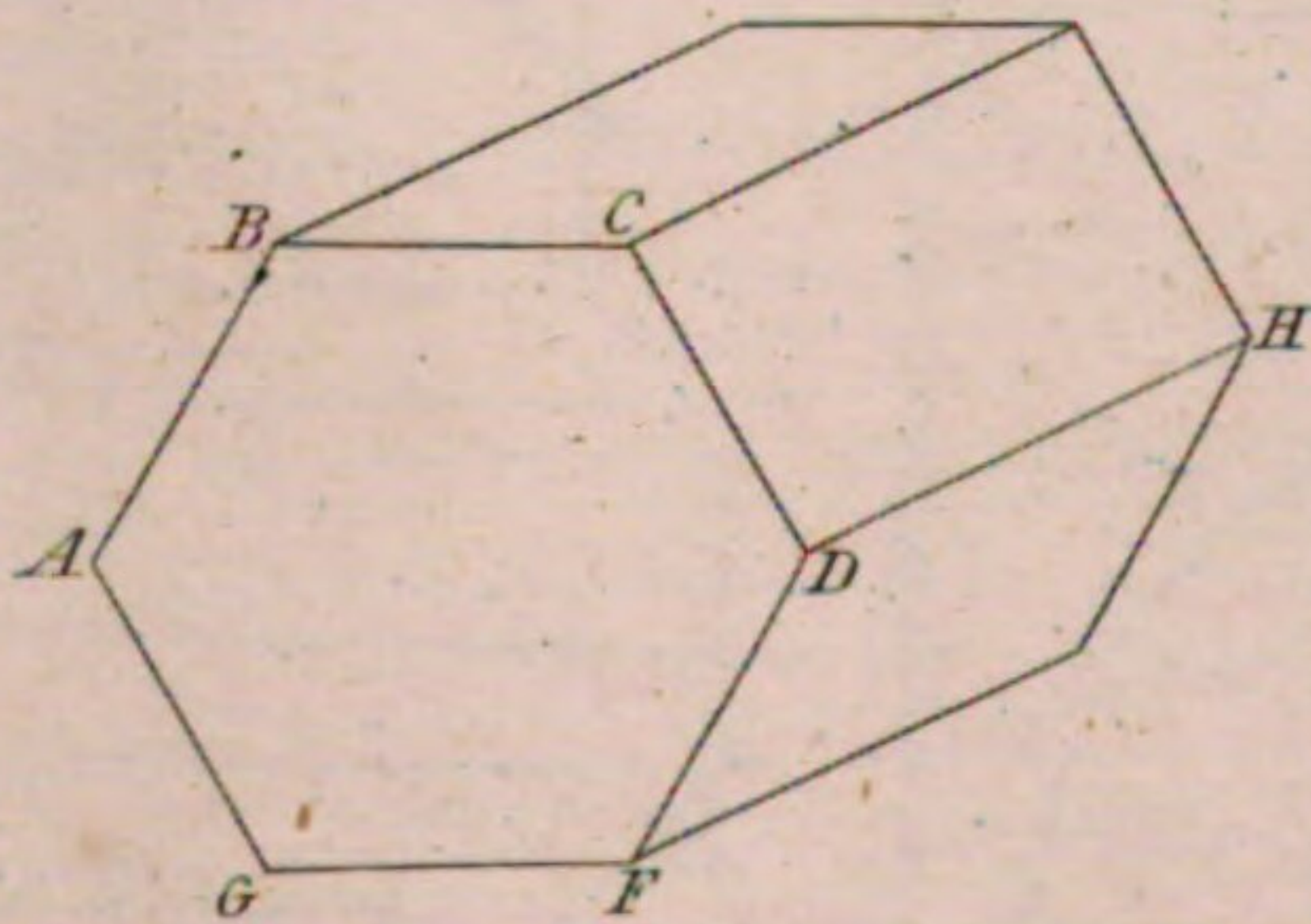


Fig. 18.

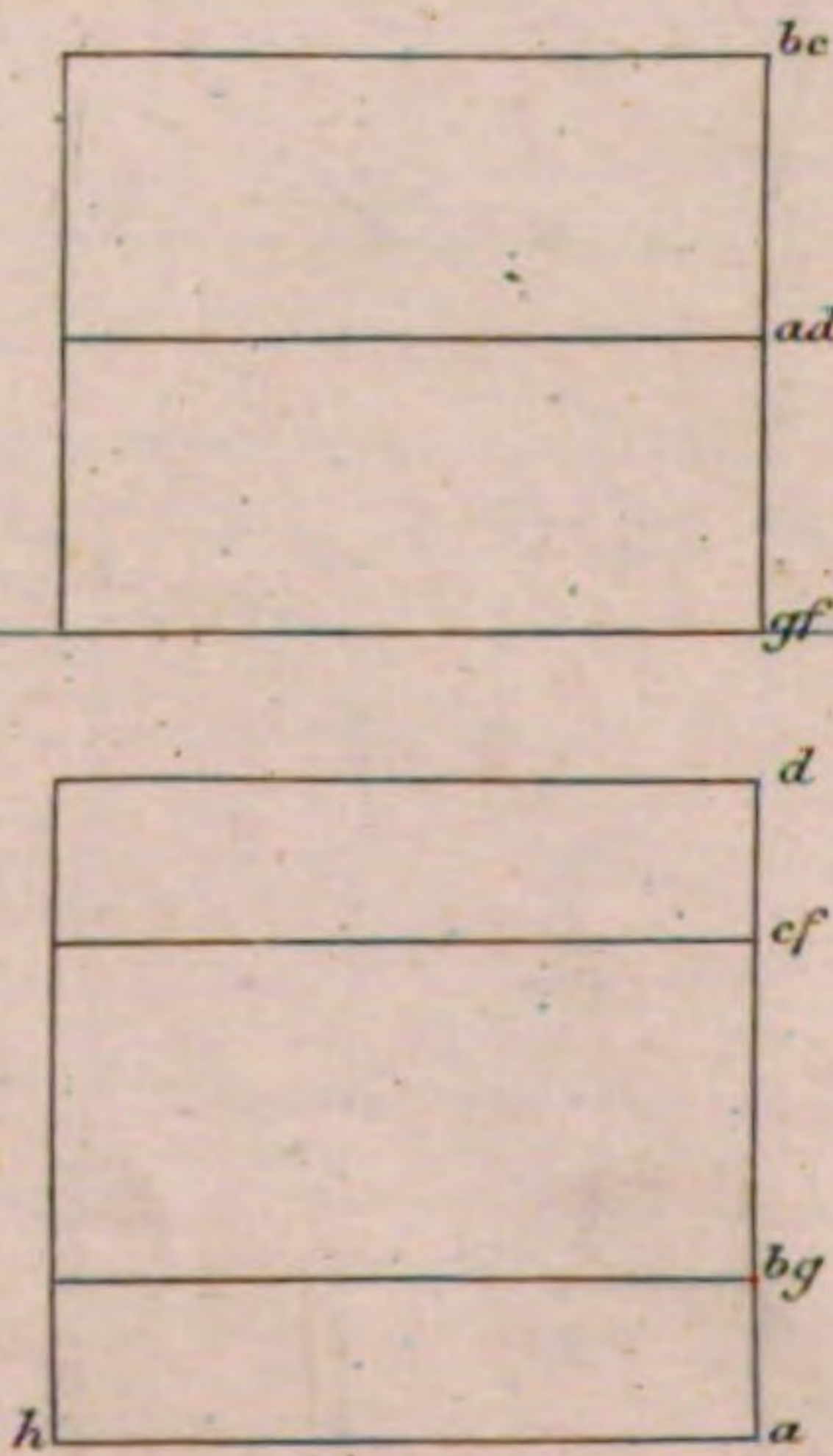


Fig. 19.

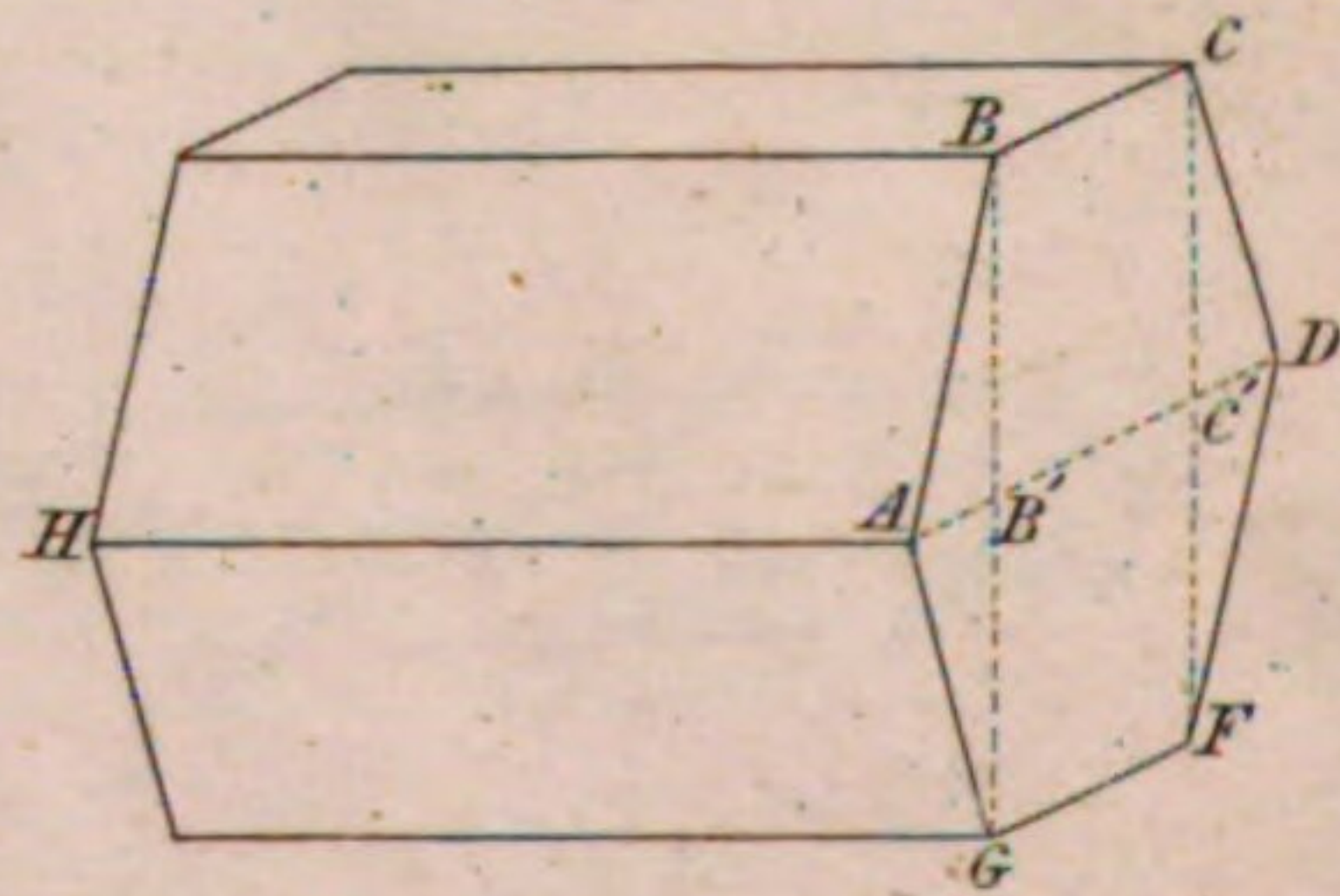


Fig. 20.

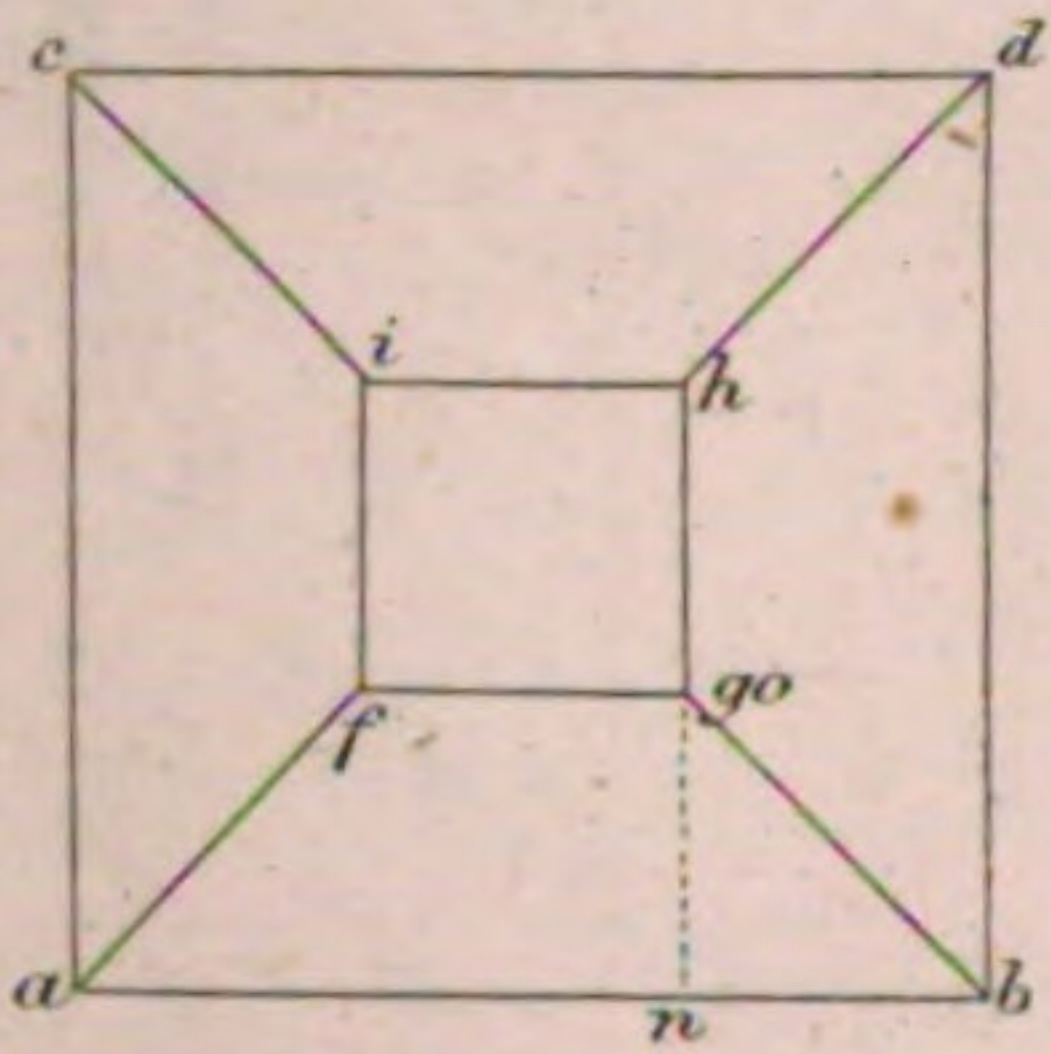
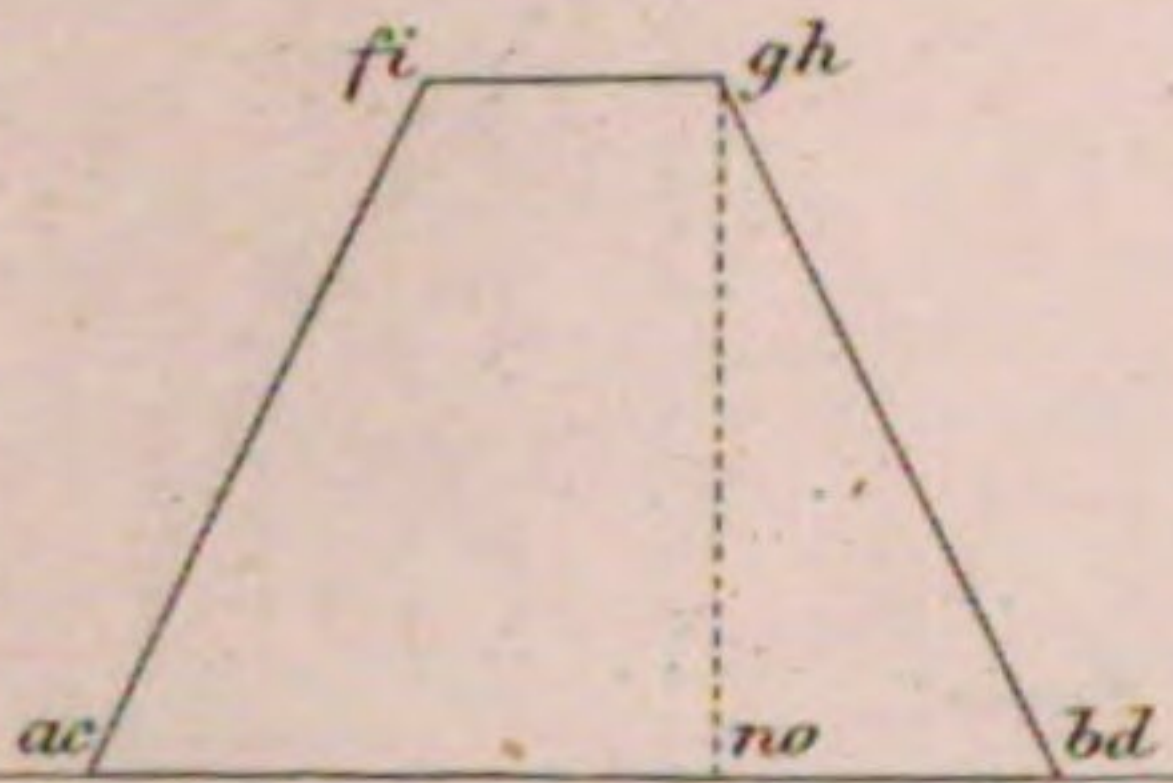


Fig. 21.

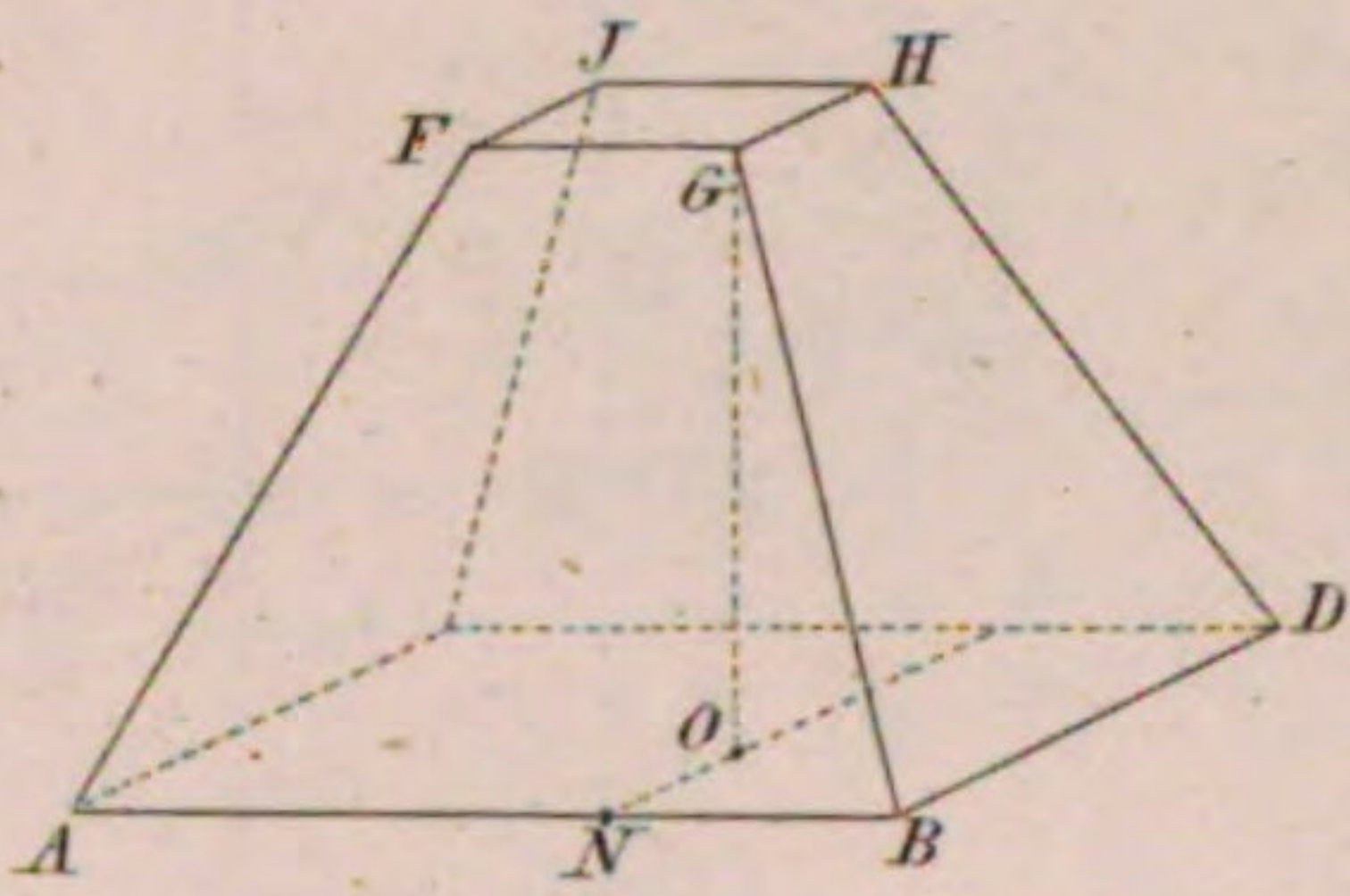


Fig. 22.

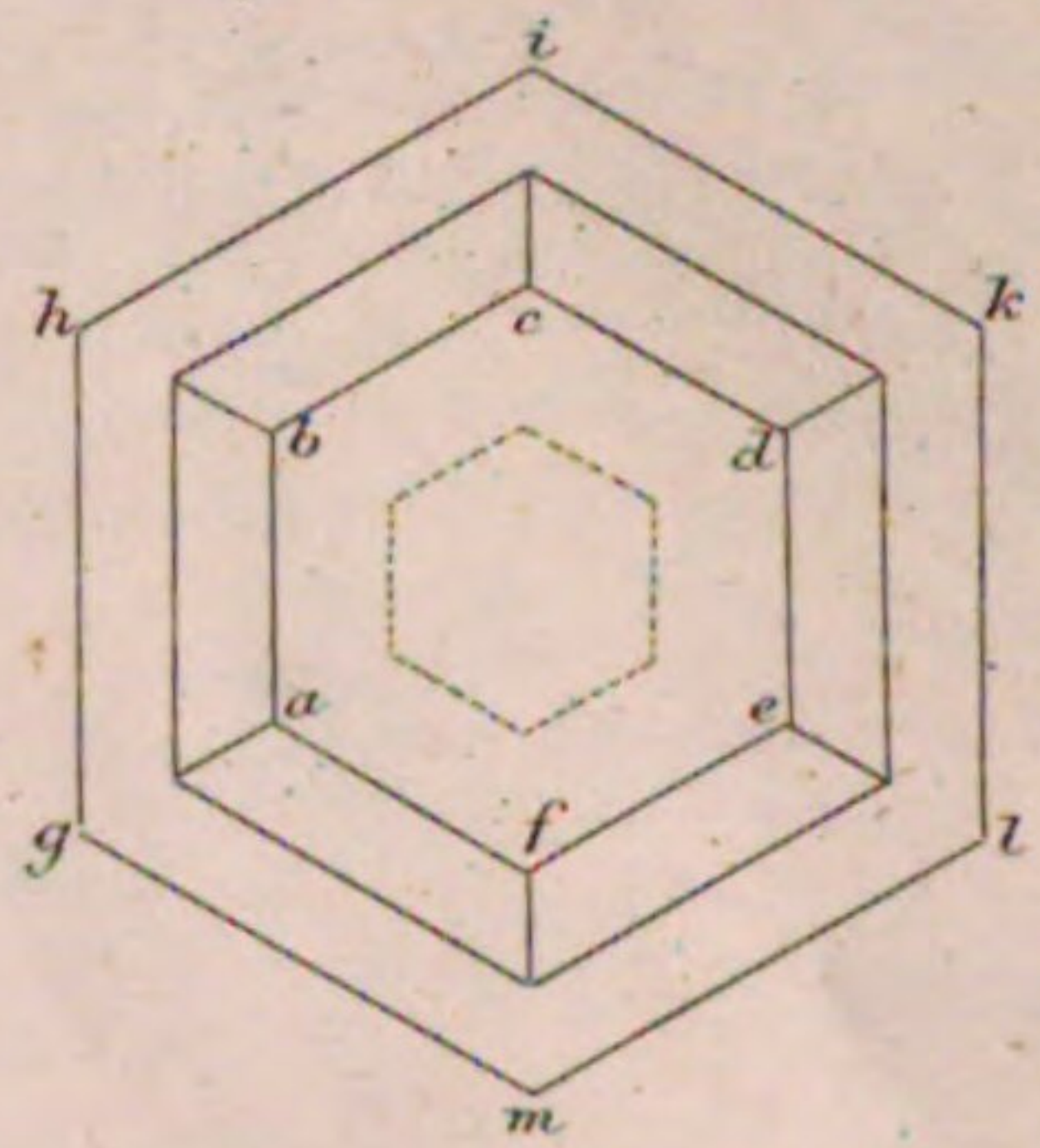
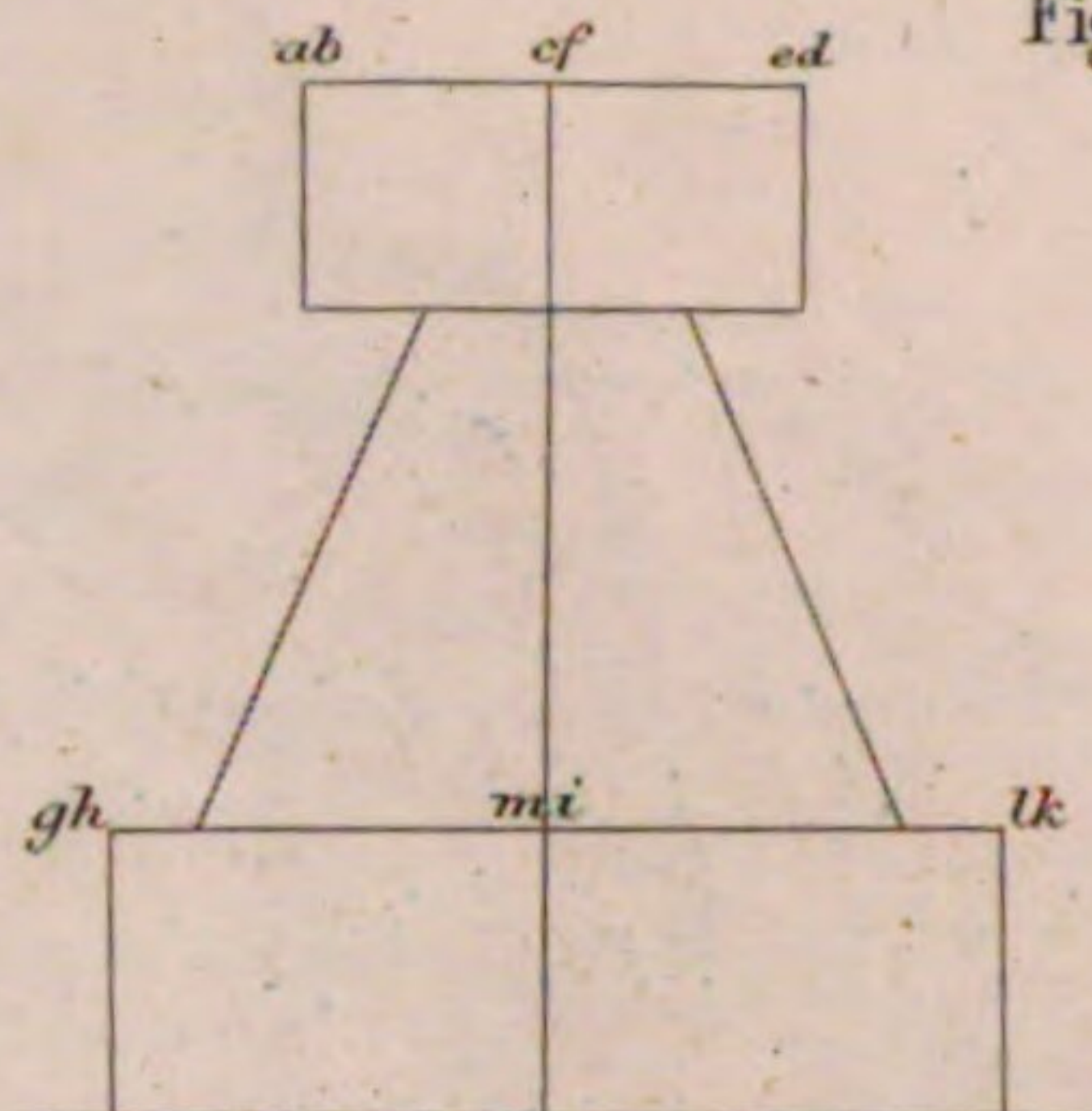


Fig. 23.

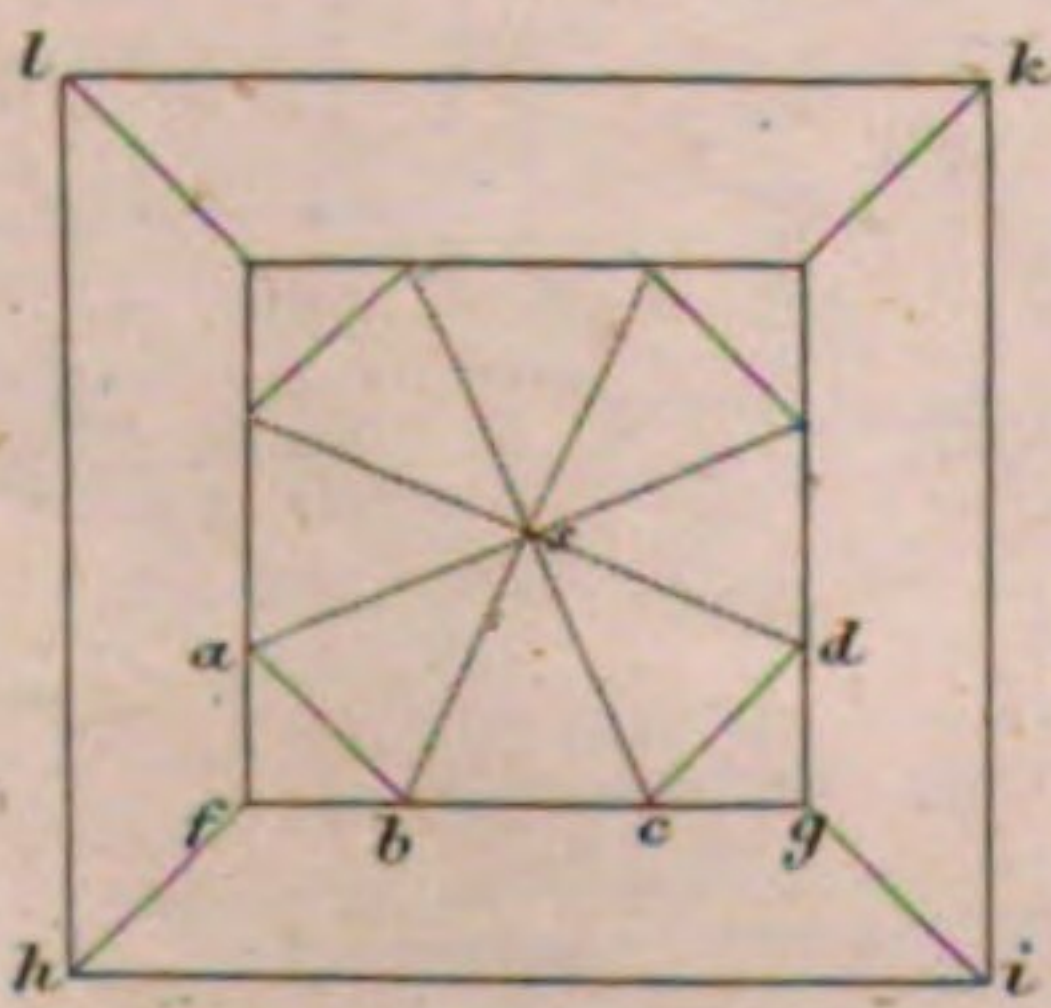
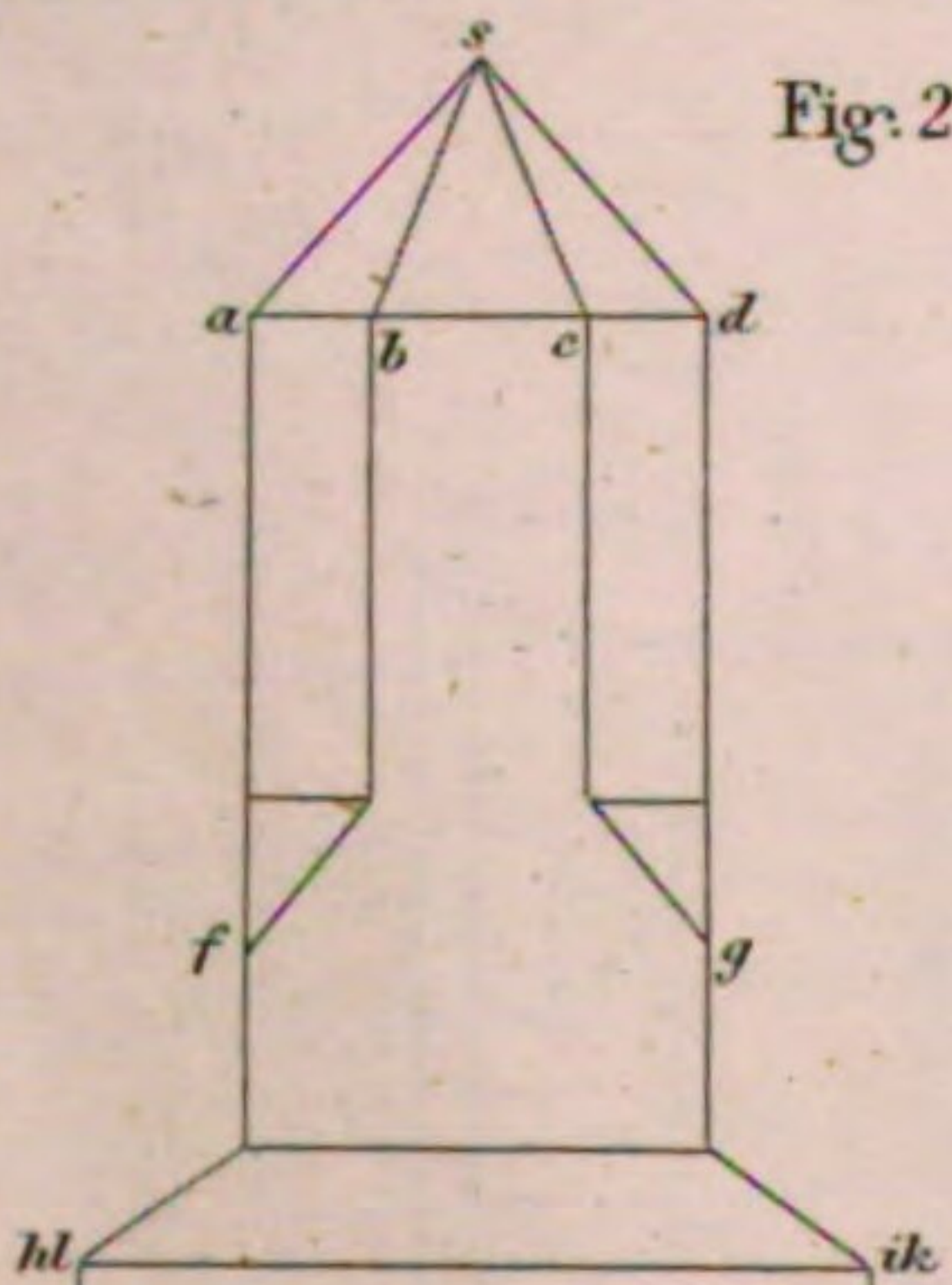


Fig. 24.

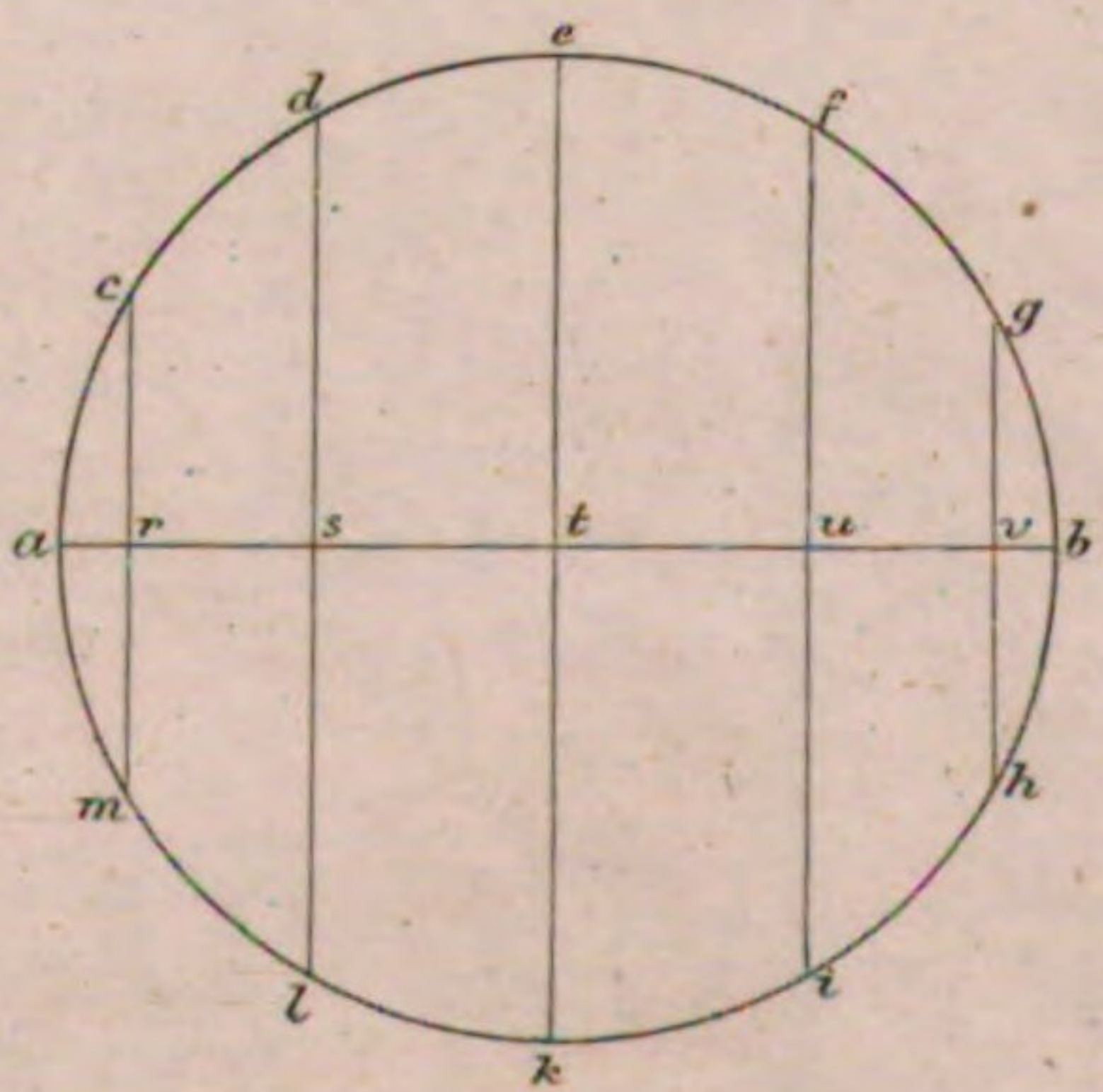
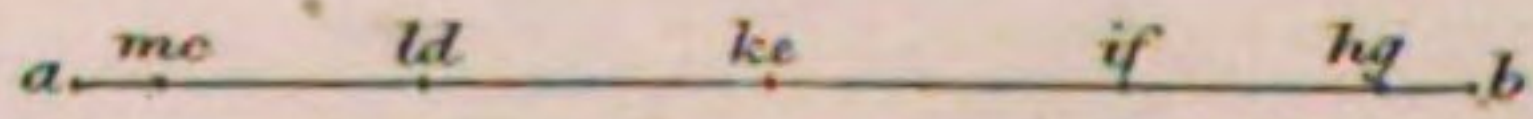


Fig. 25.

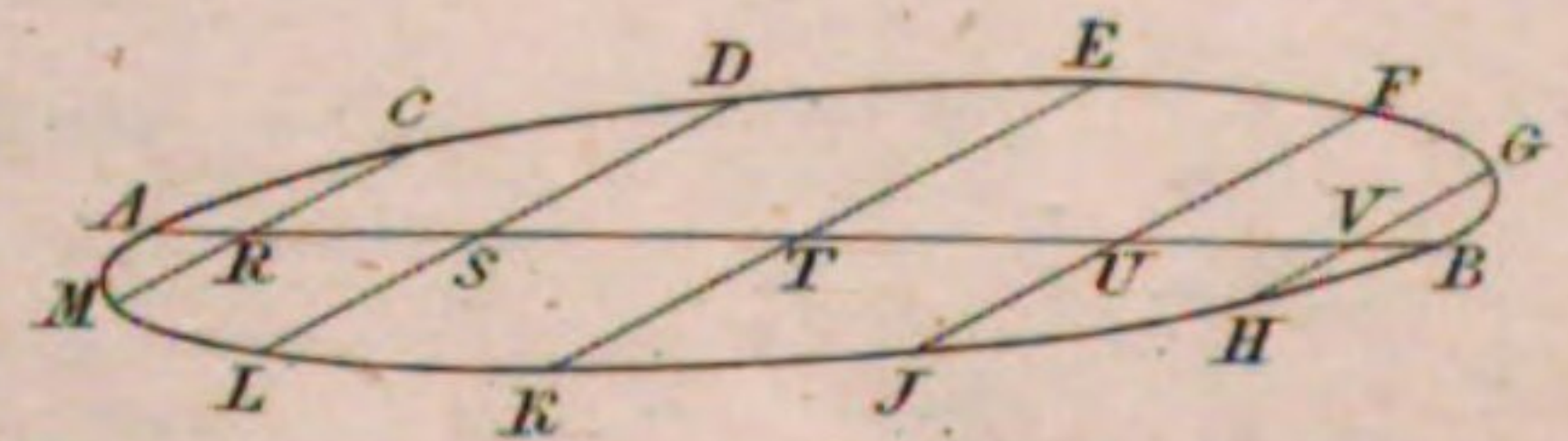


Fig. 26.

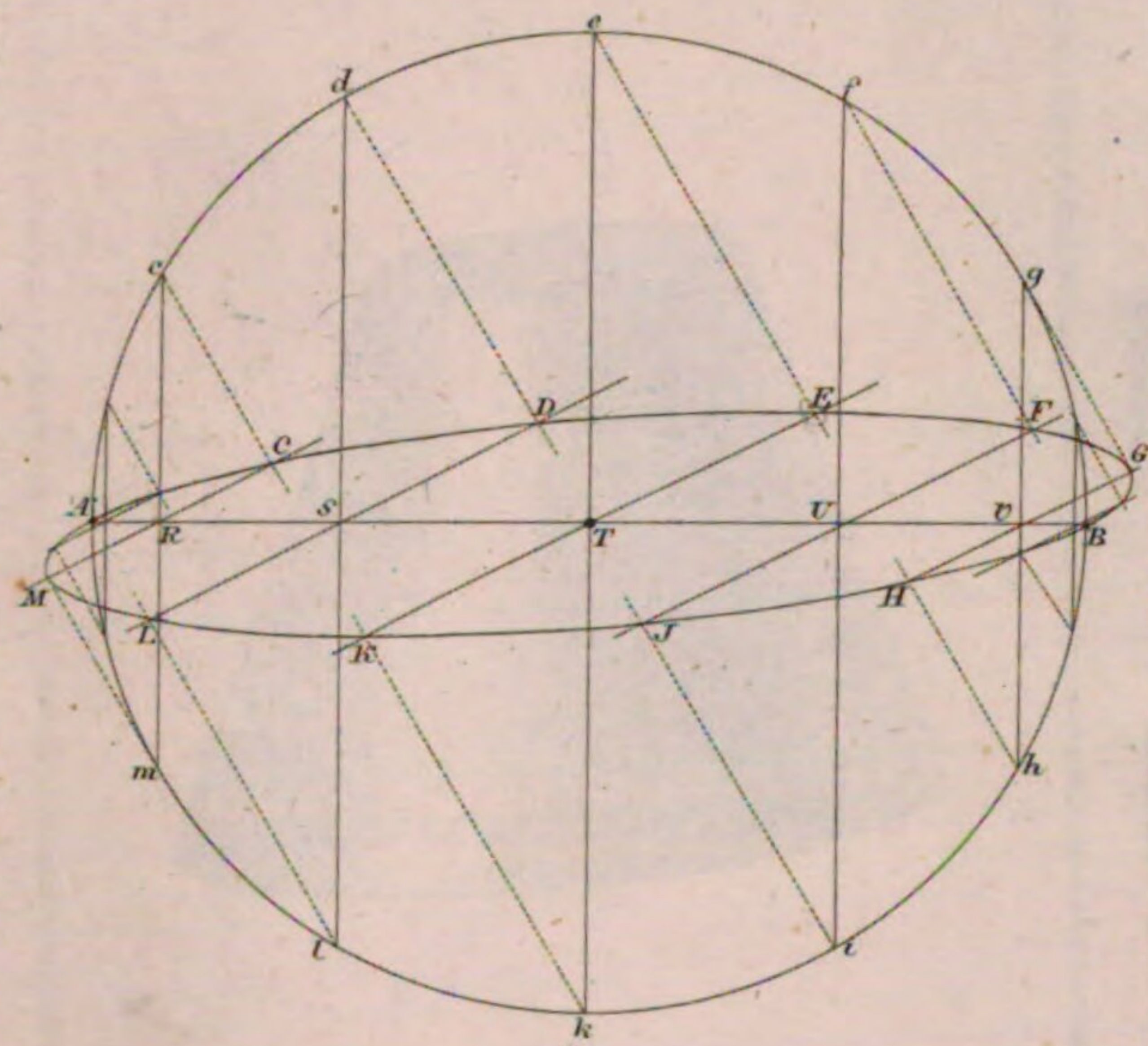


Fig. 28.

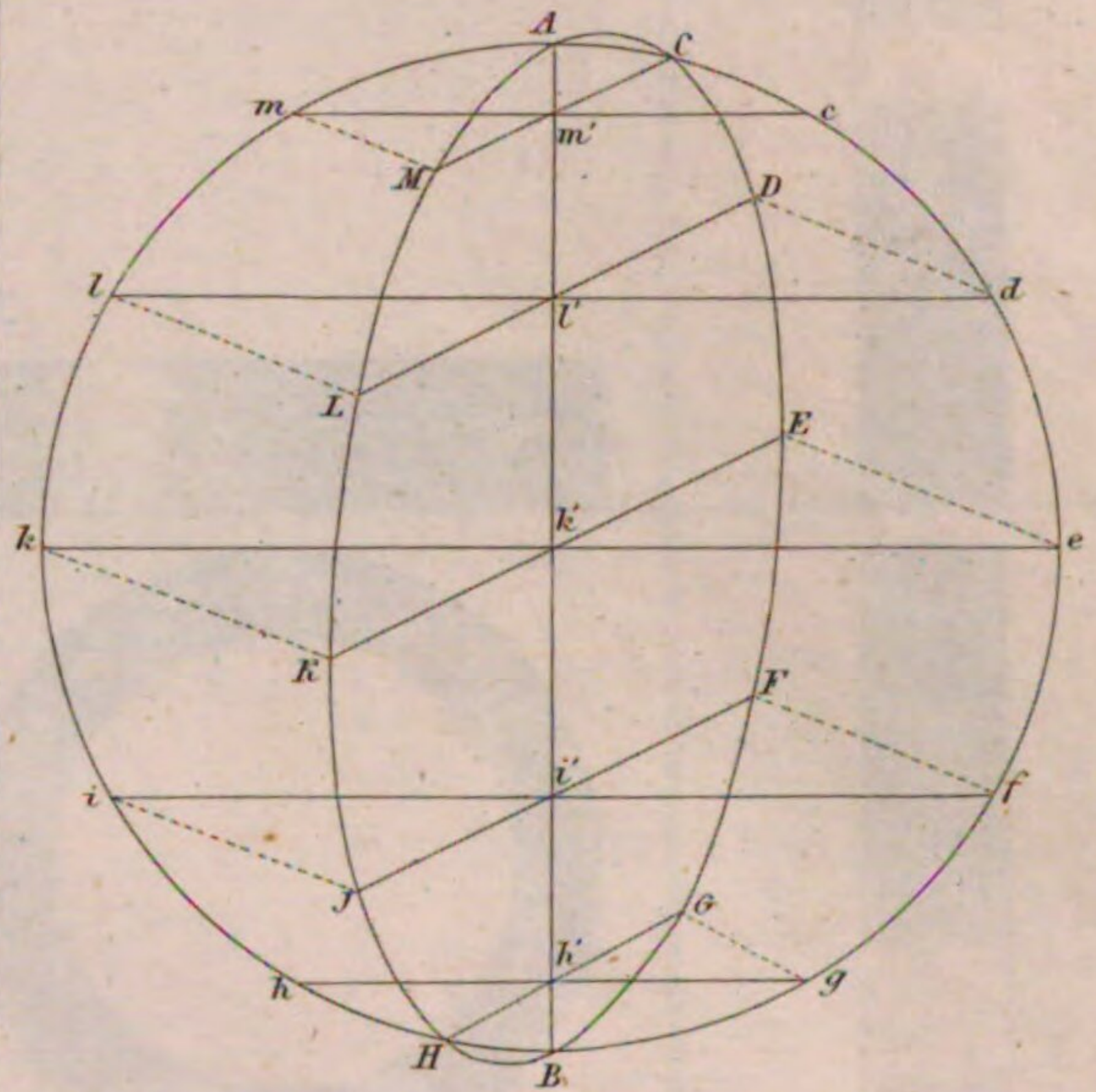


Fig. 27.

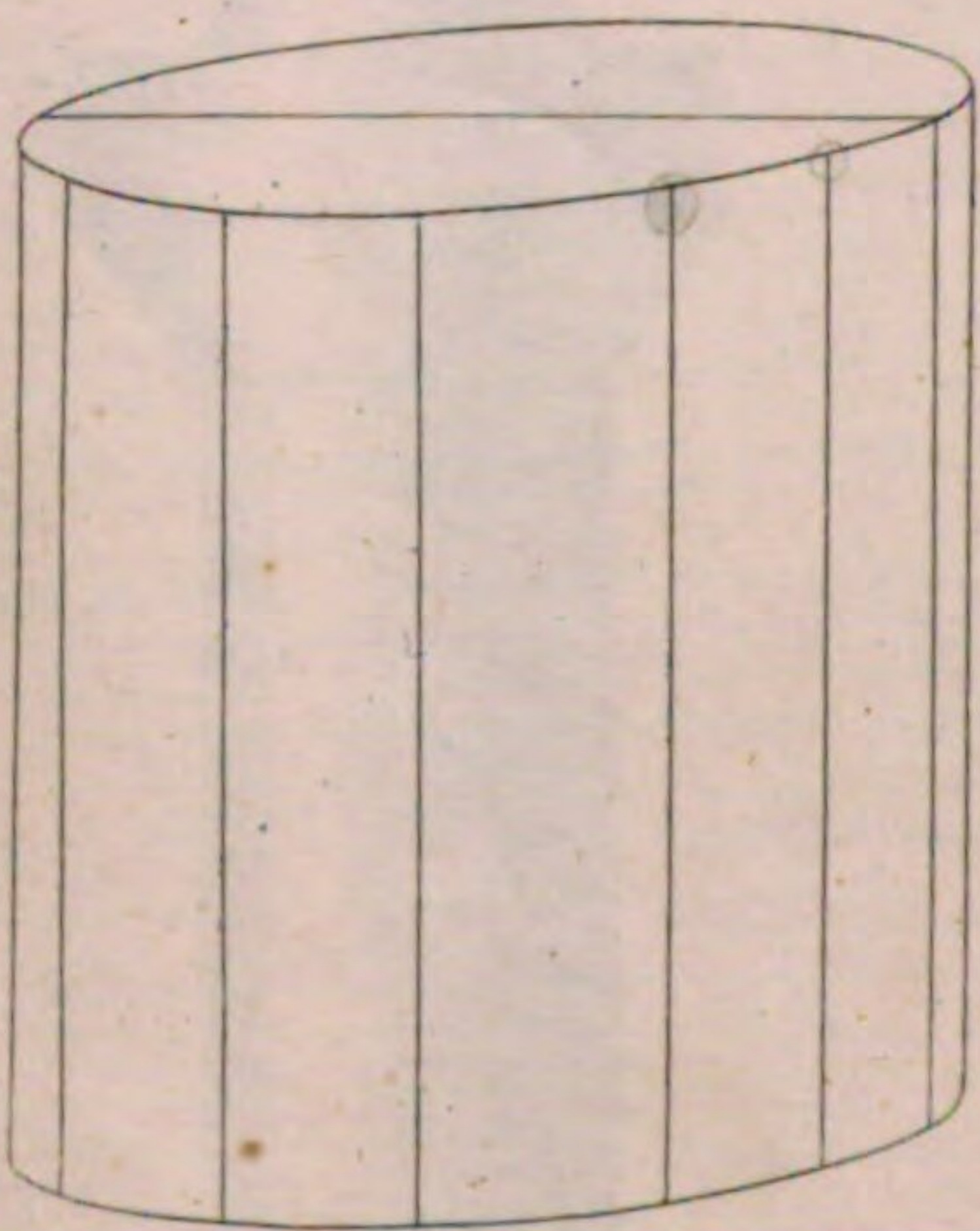


Fig. 29.

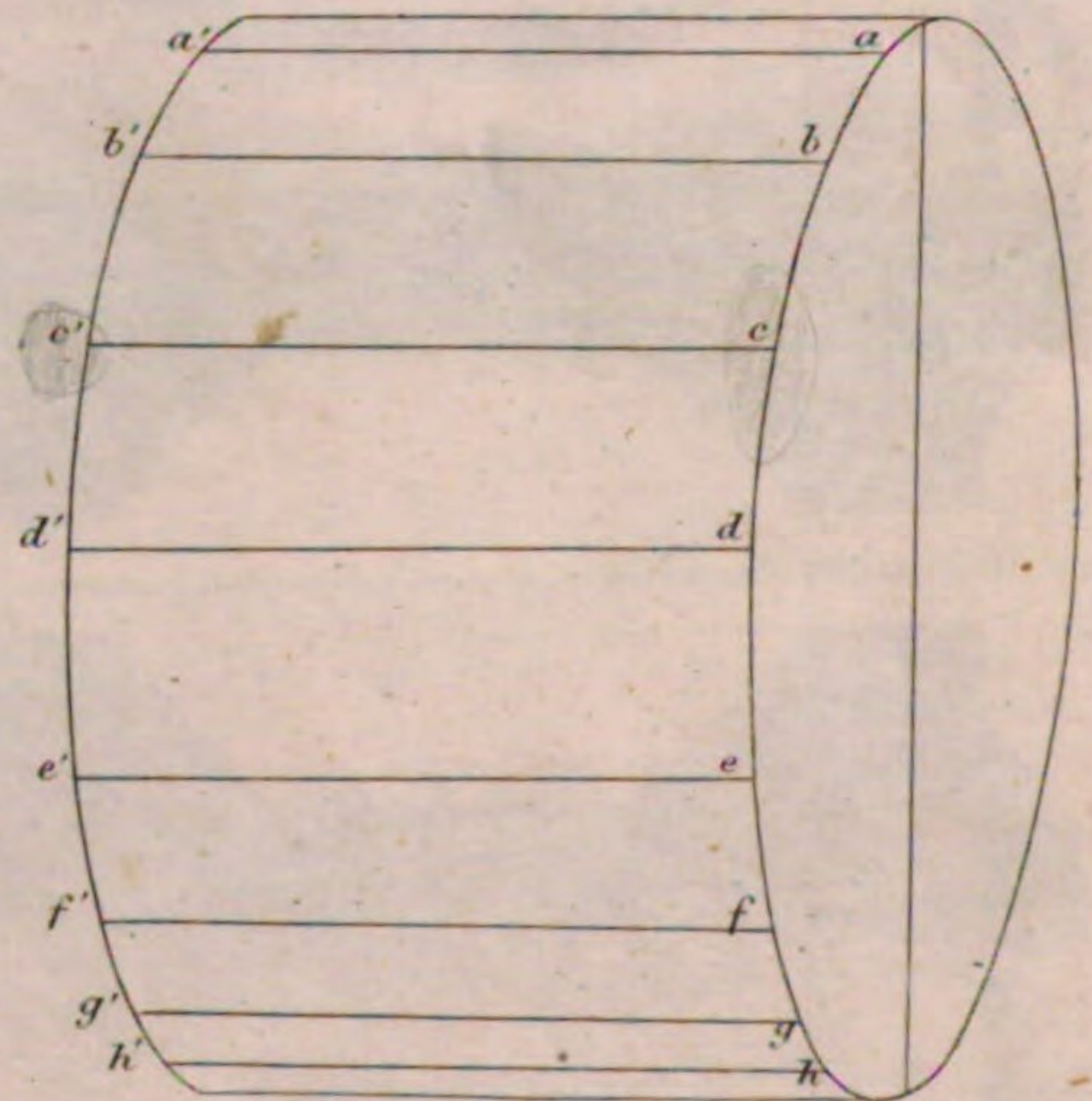


Fig. 30.

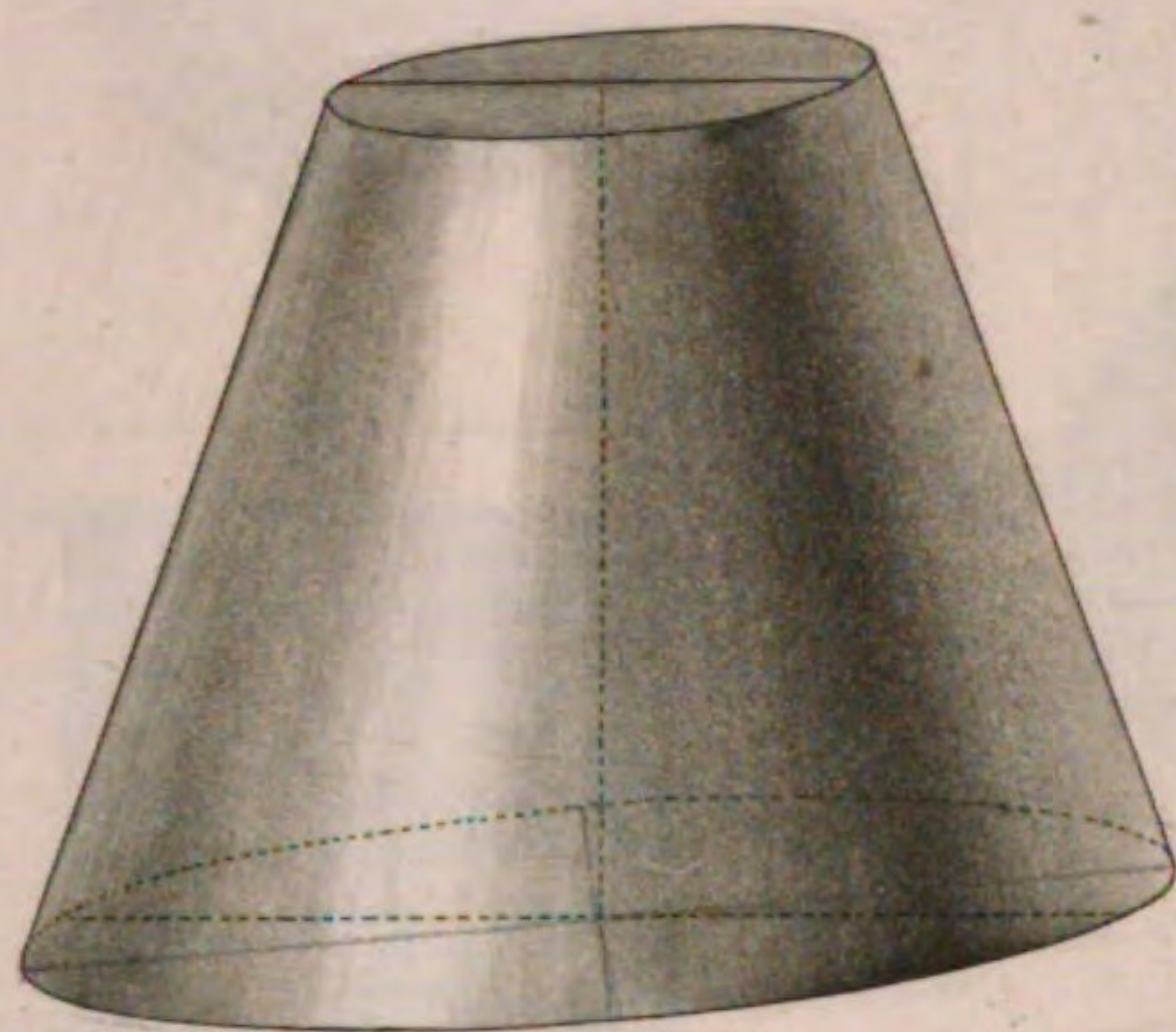


Fig. 31.

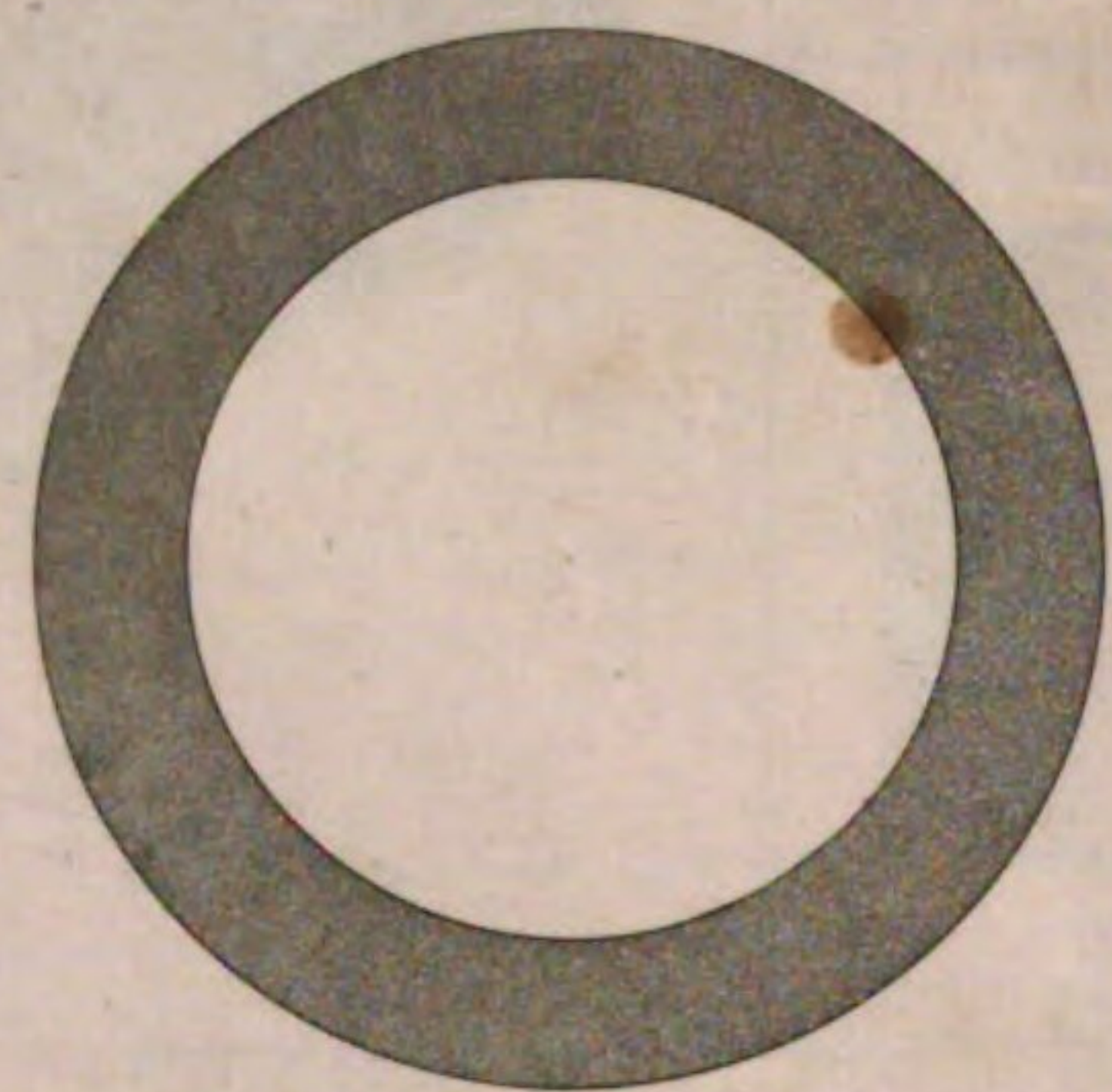


Fig. 32.



Fig. 33.

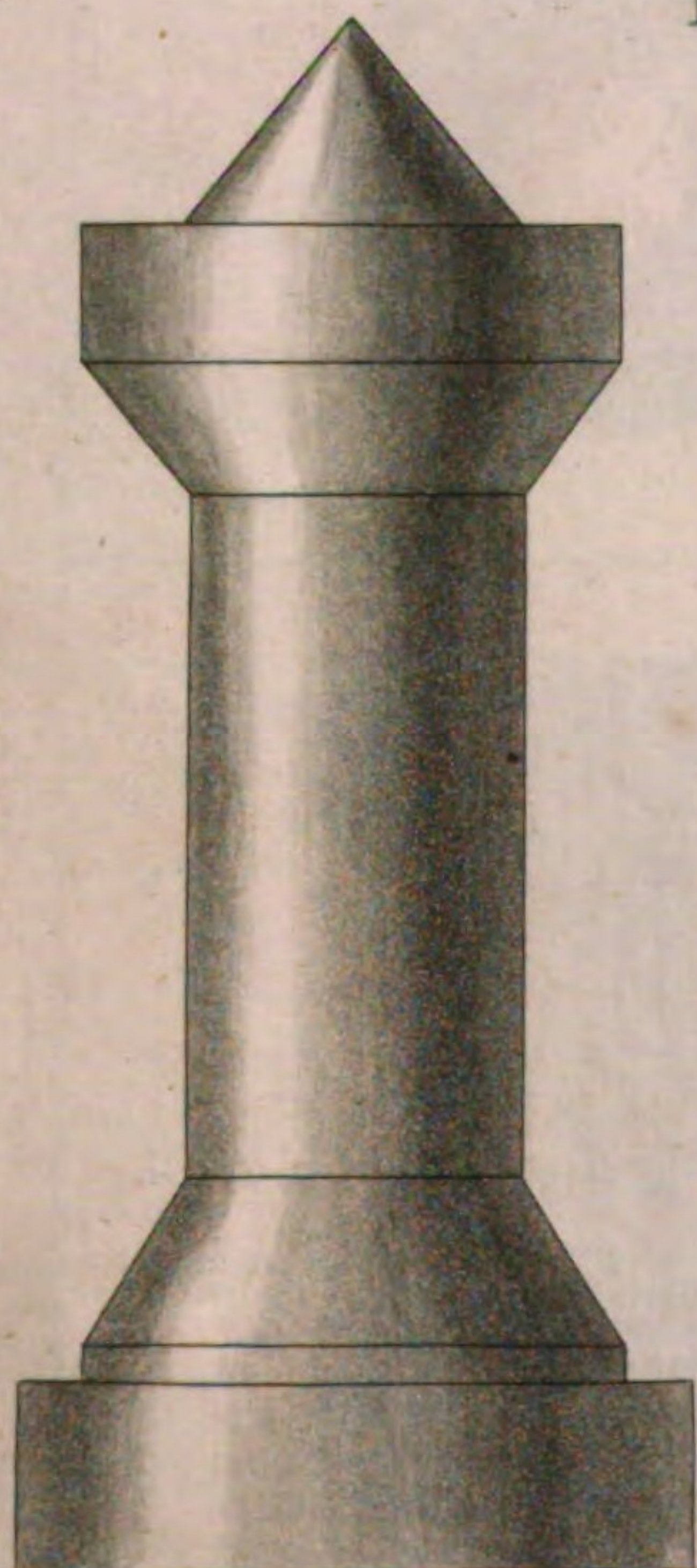


Fig. 34.

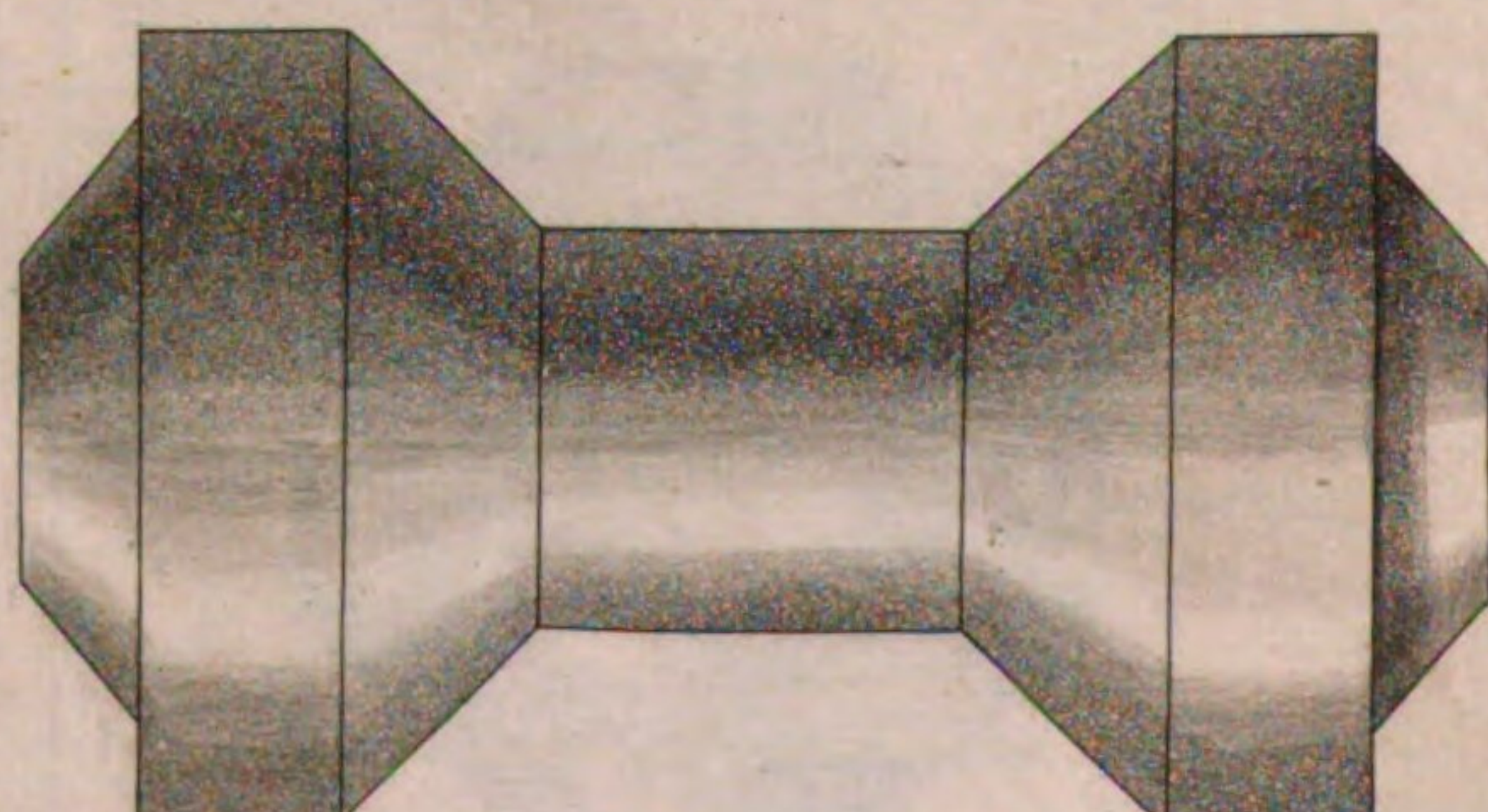
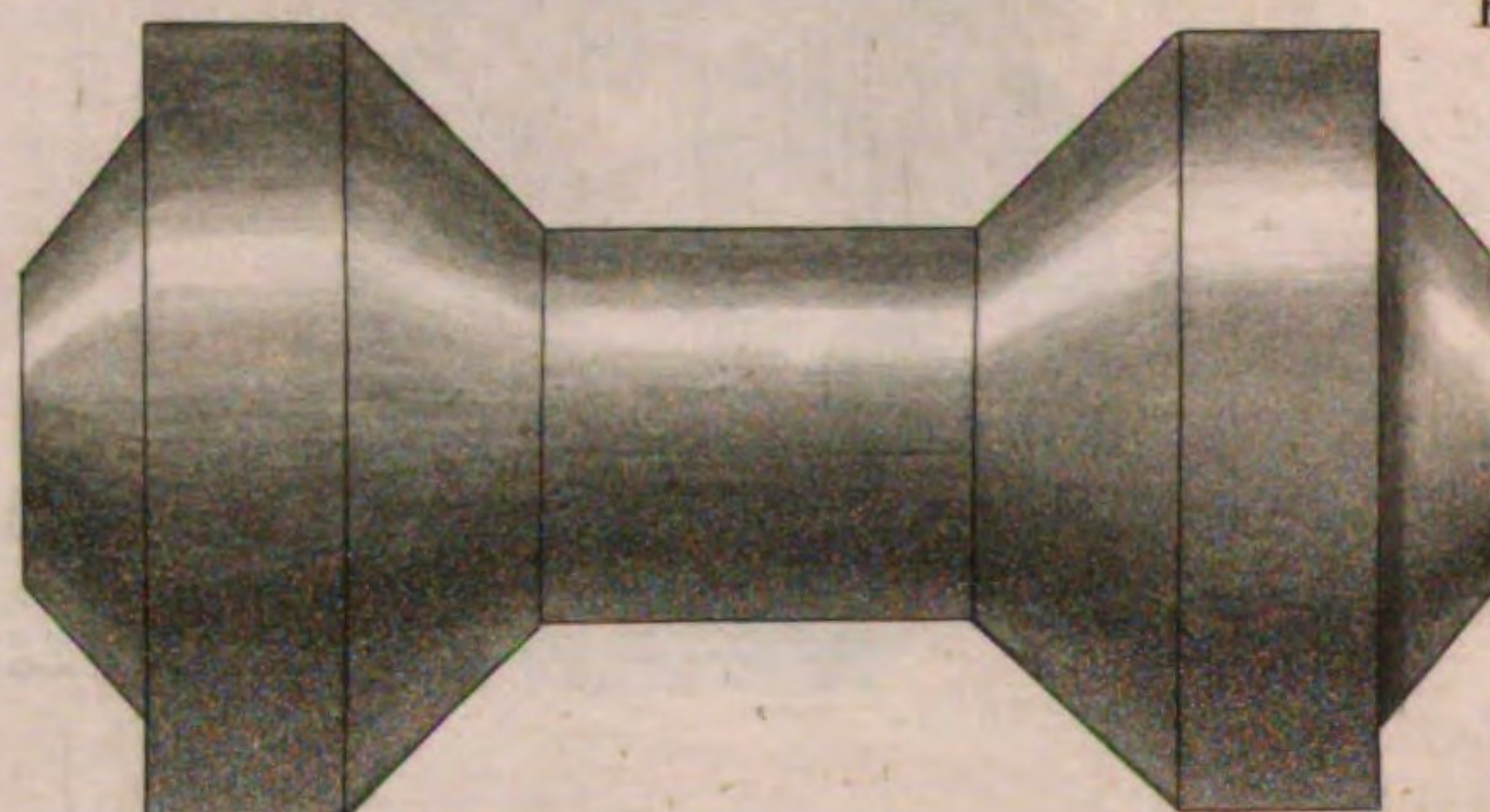


Fig:35.

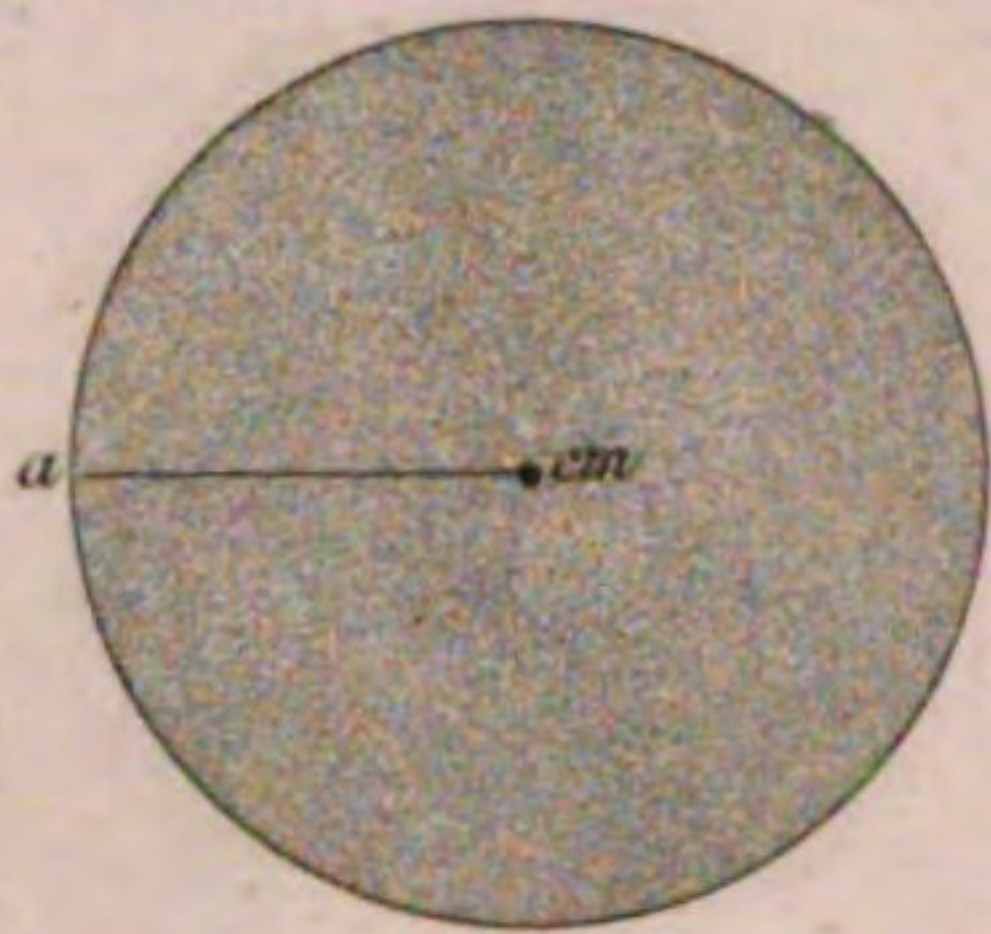


Fig:36.

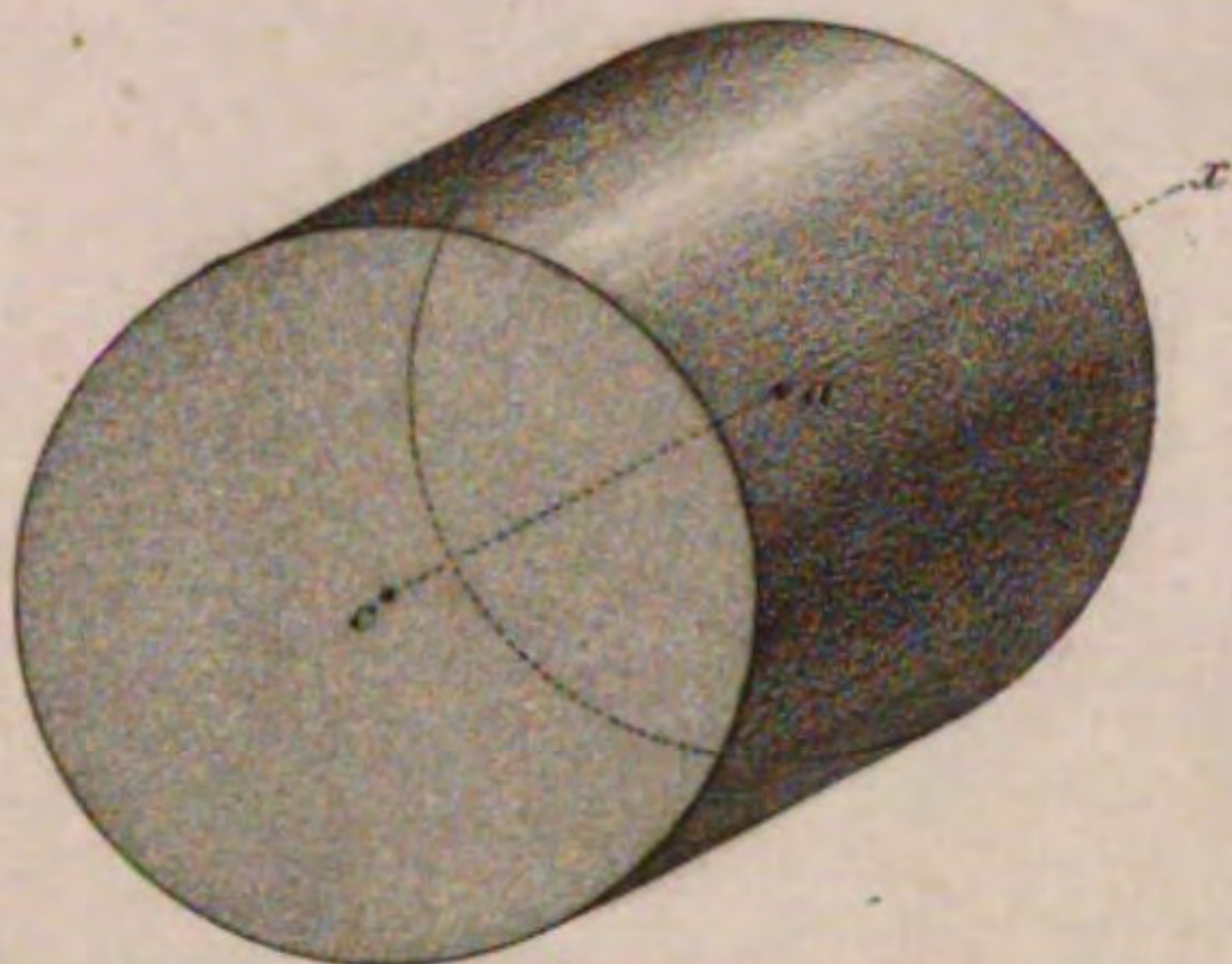


Fig:37.

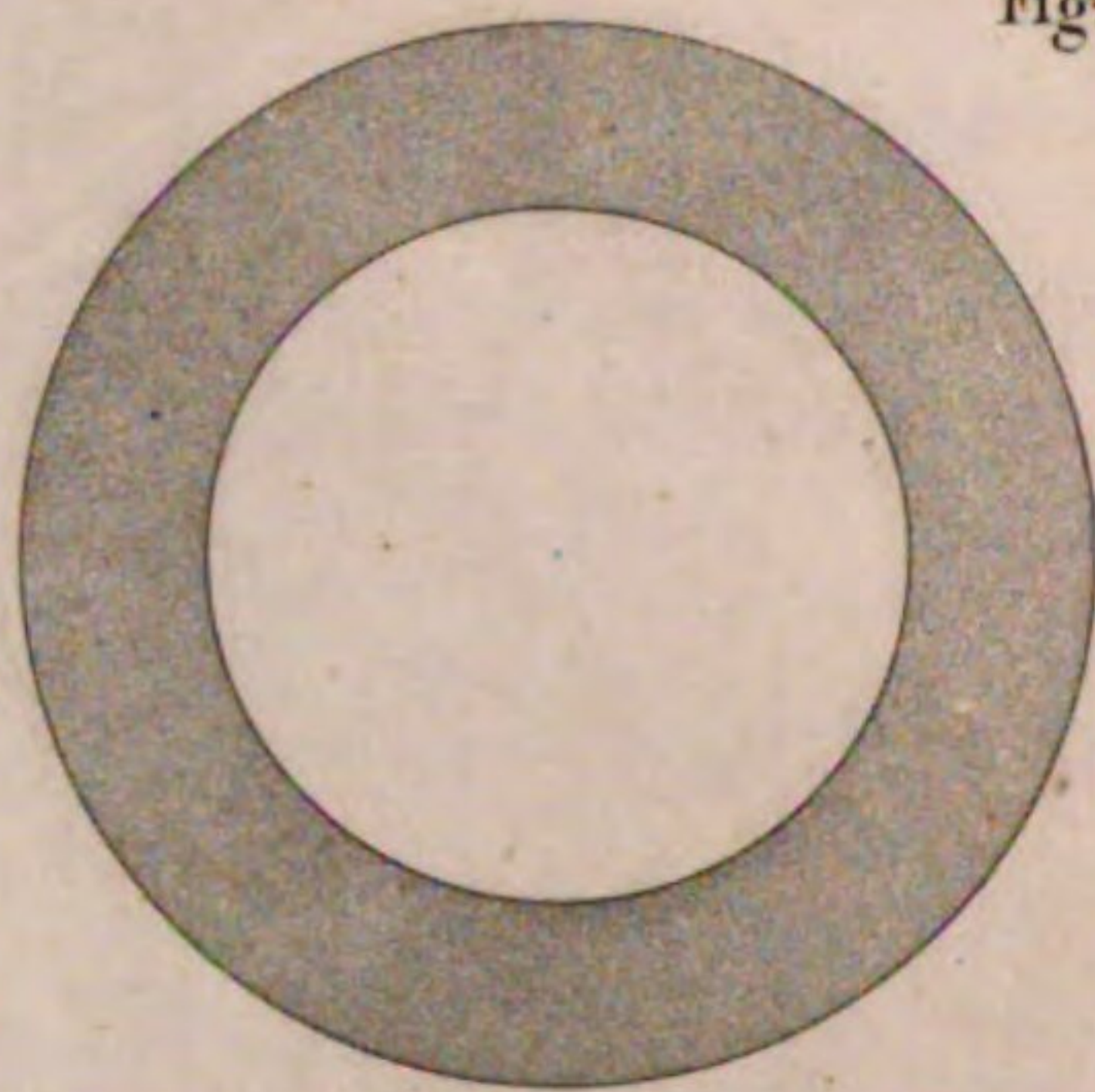


Fig:38.

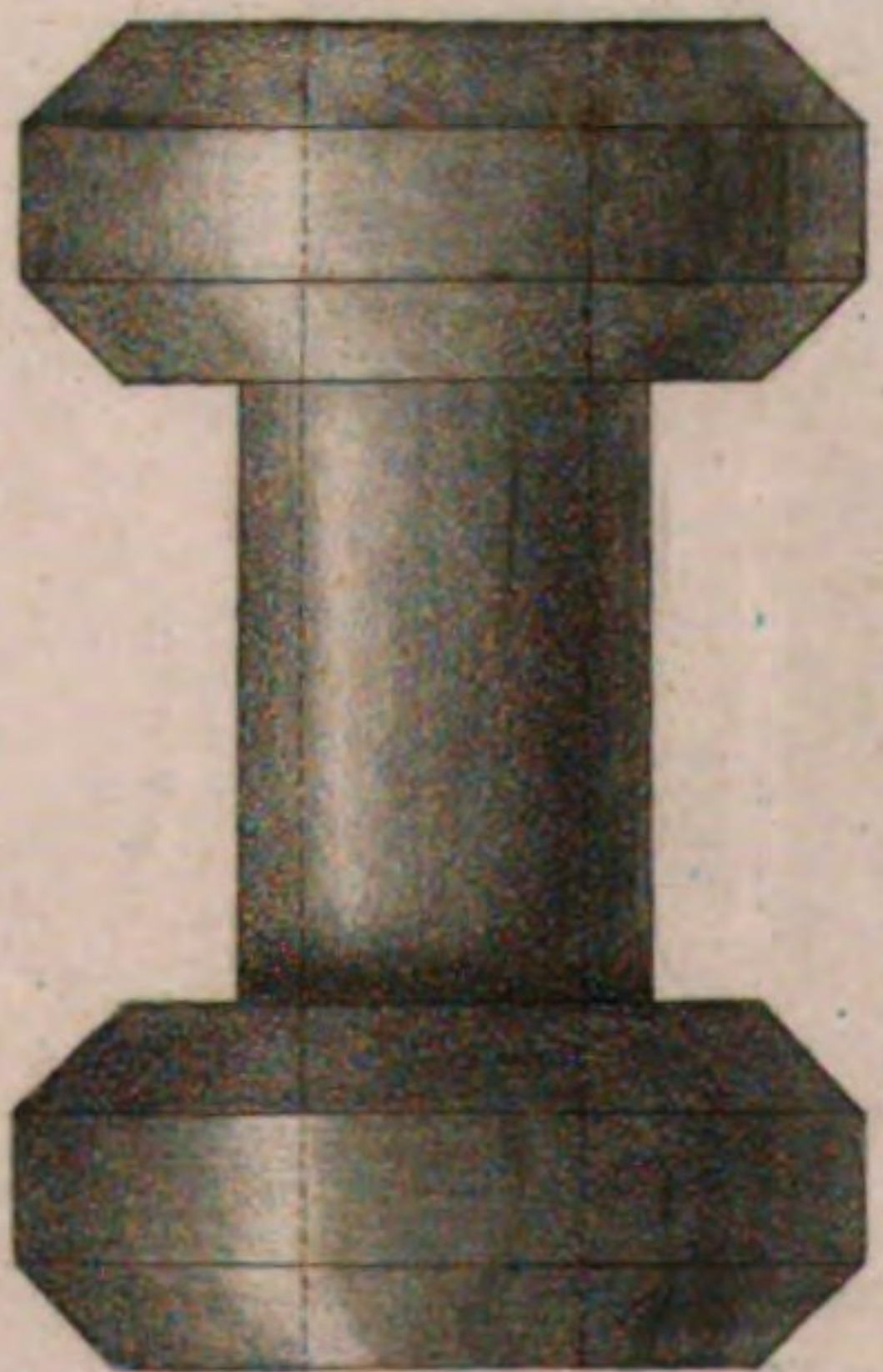
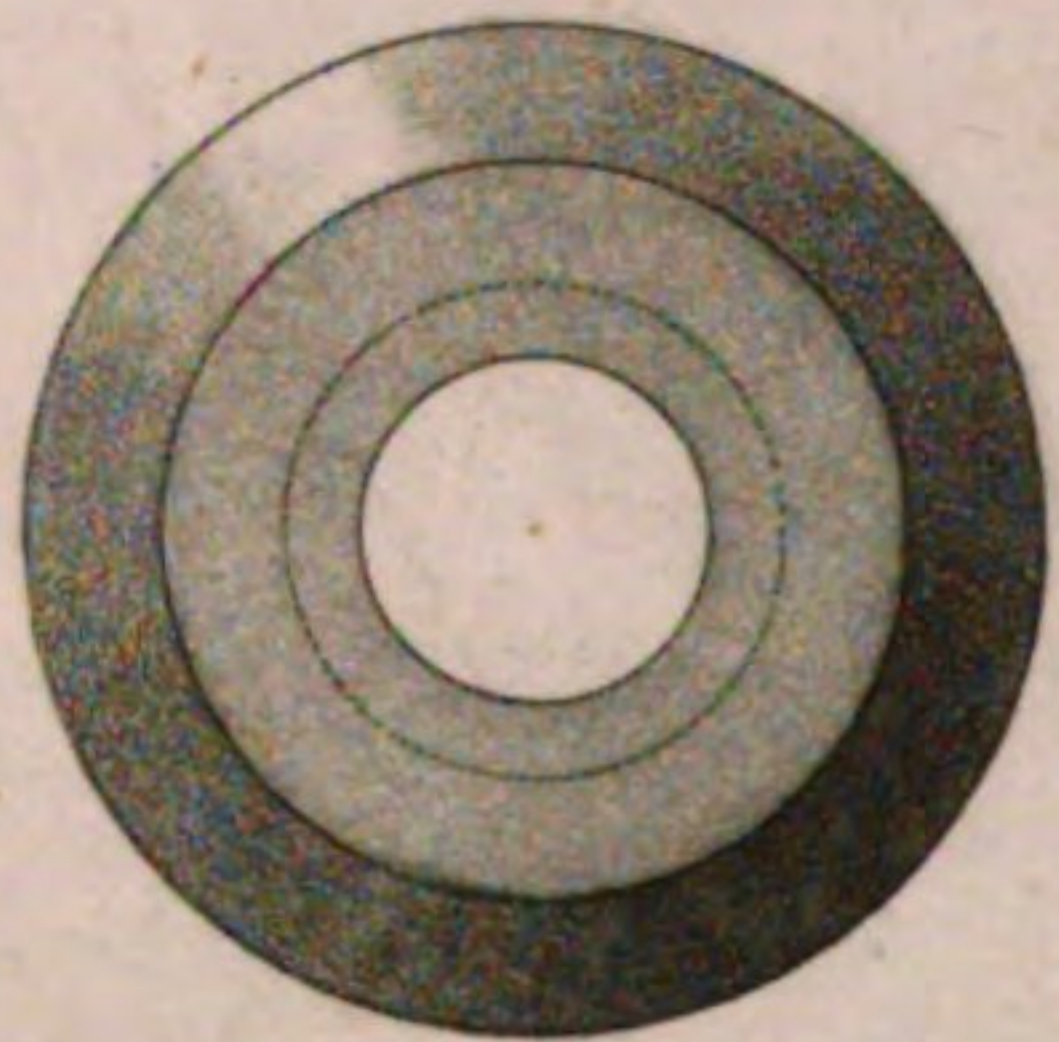


Fig:39.

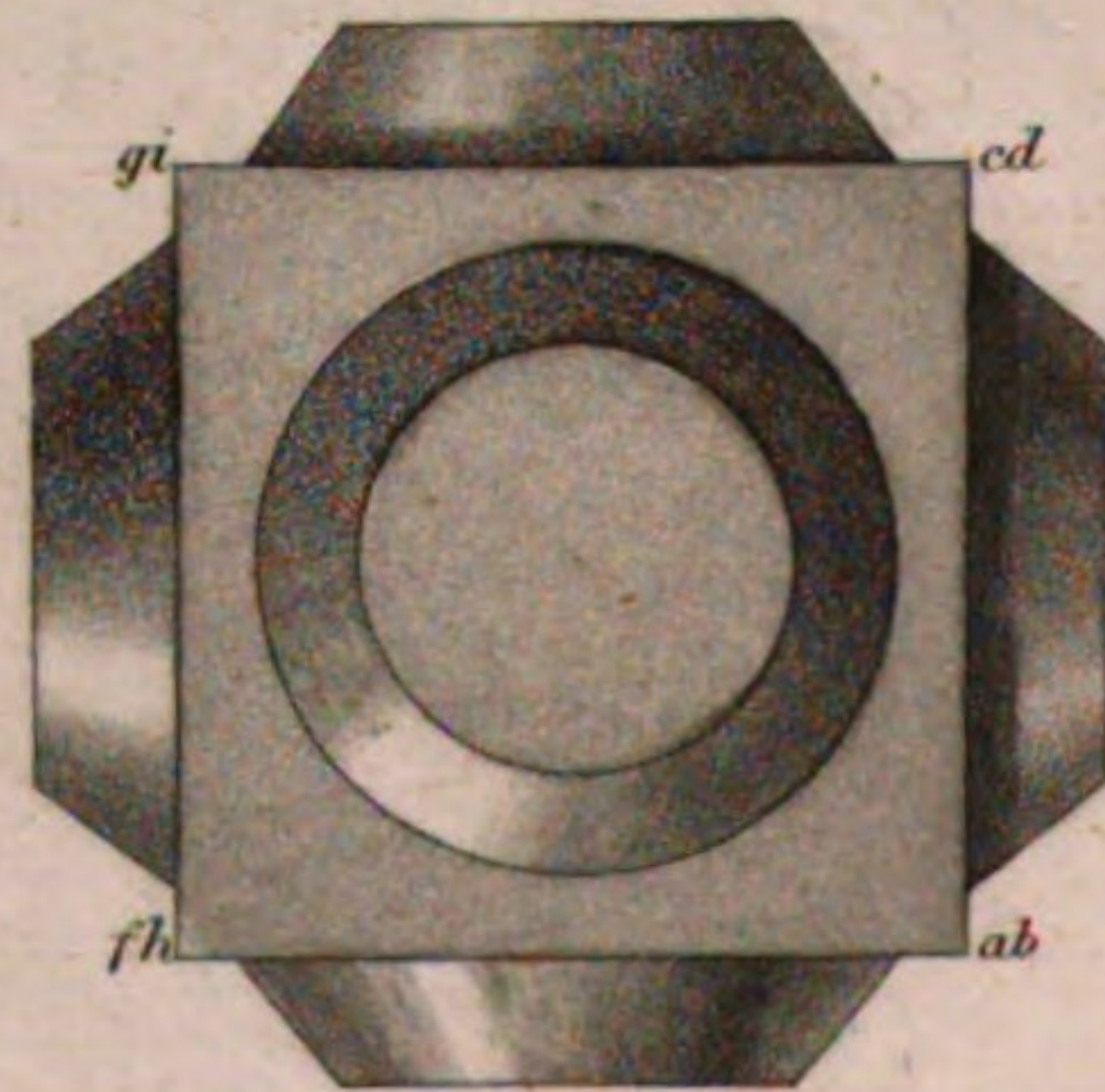
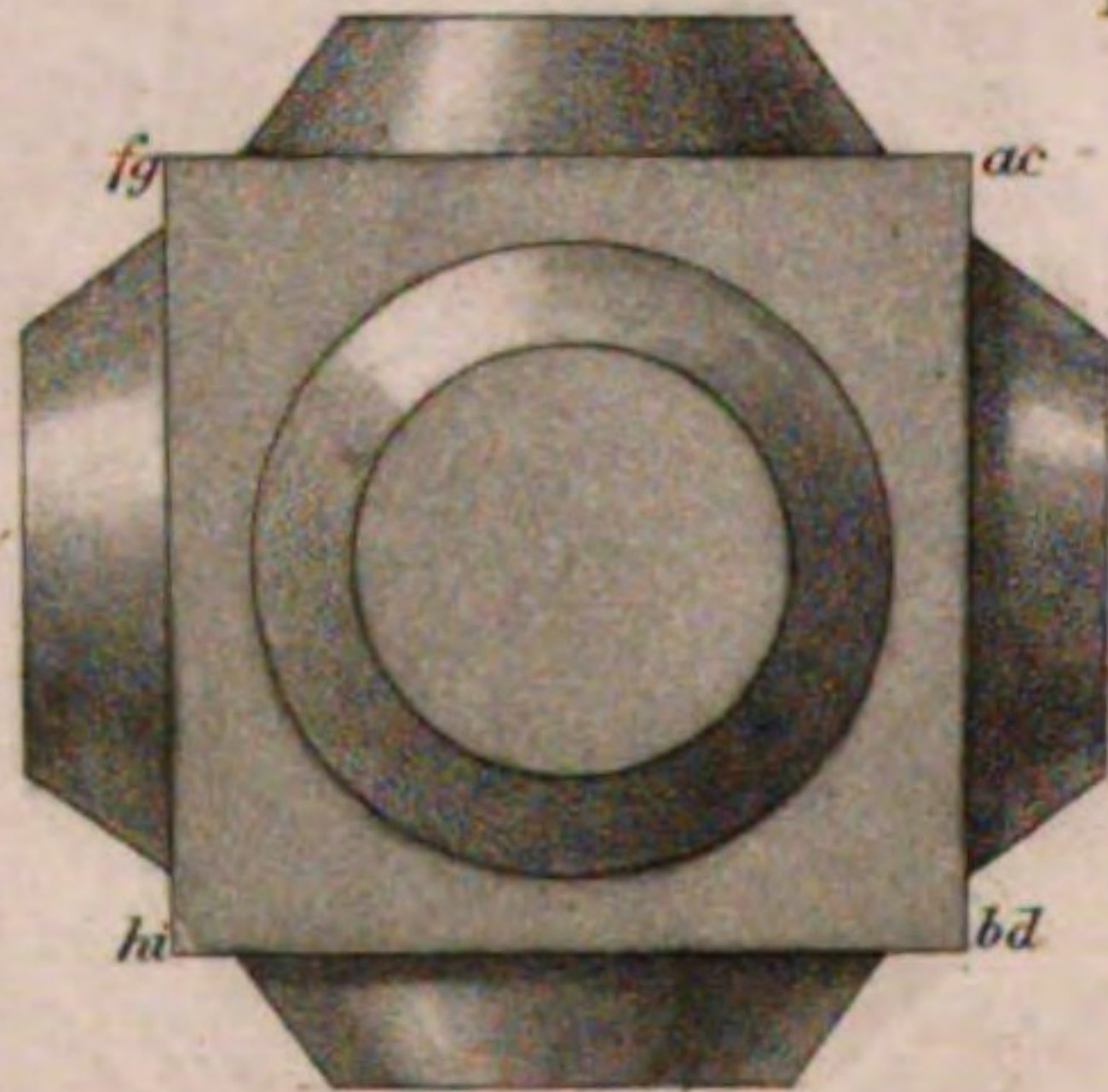


Fig:40.

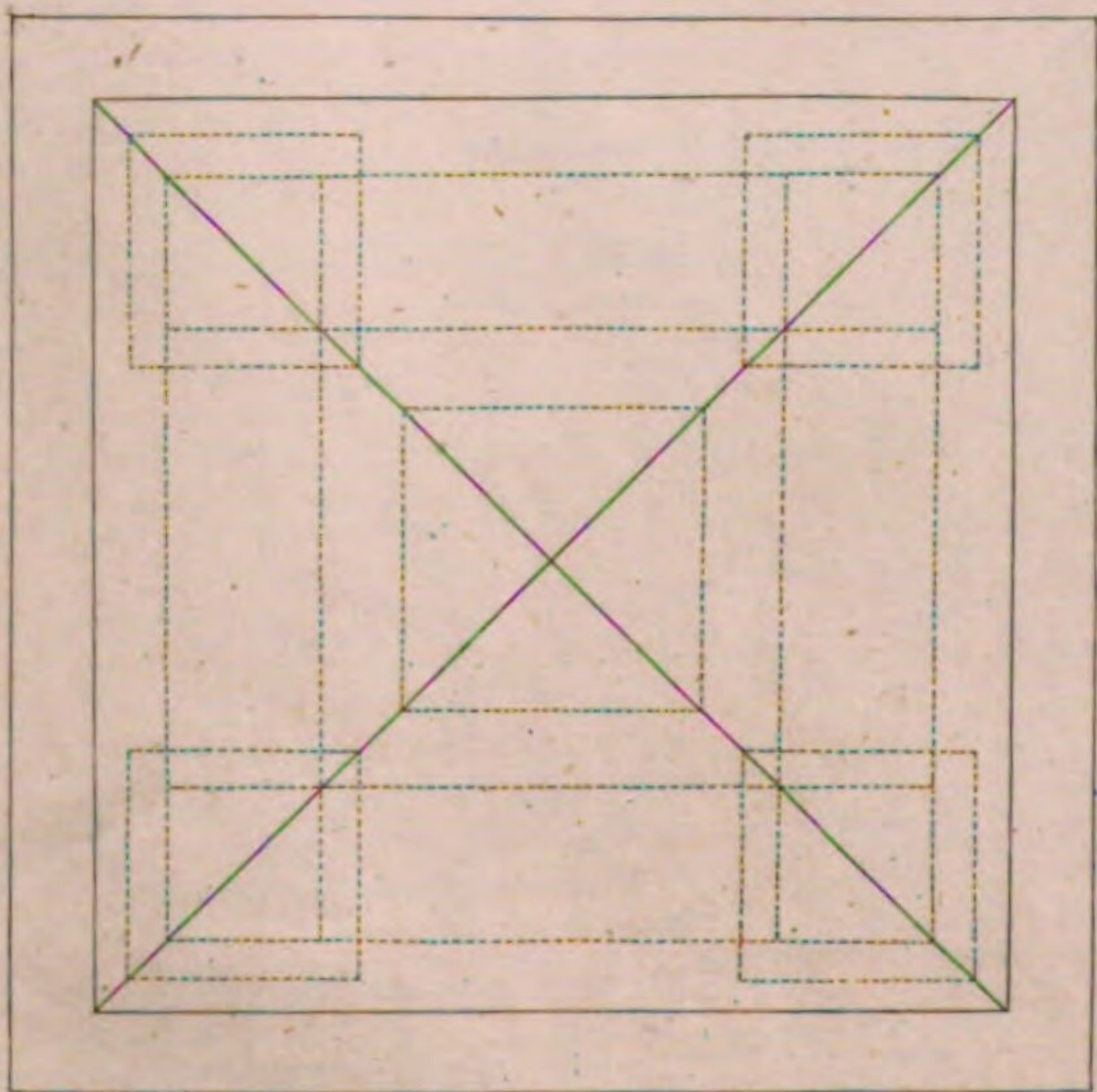
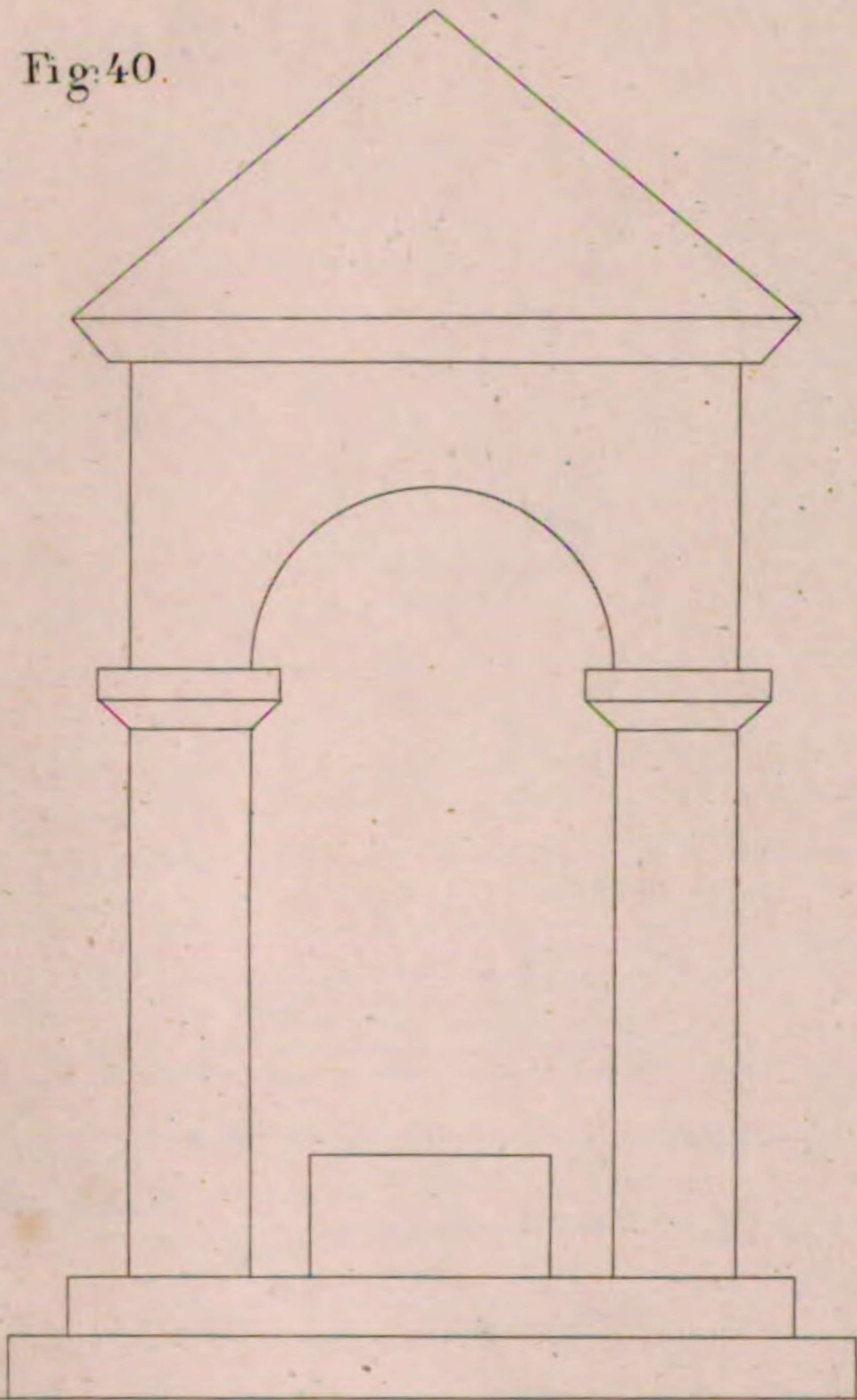


Fig:41.

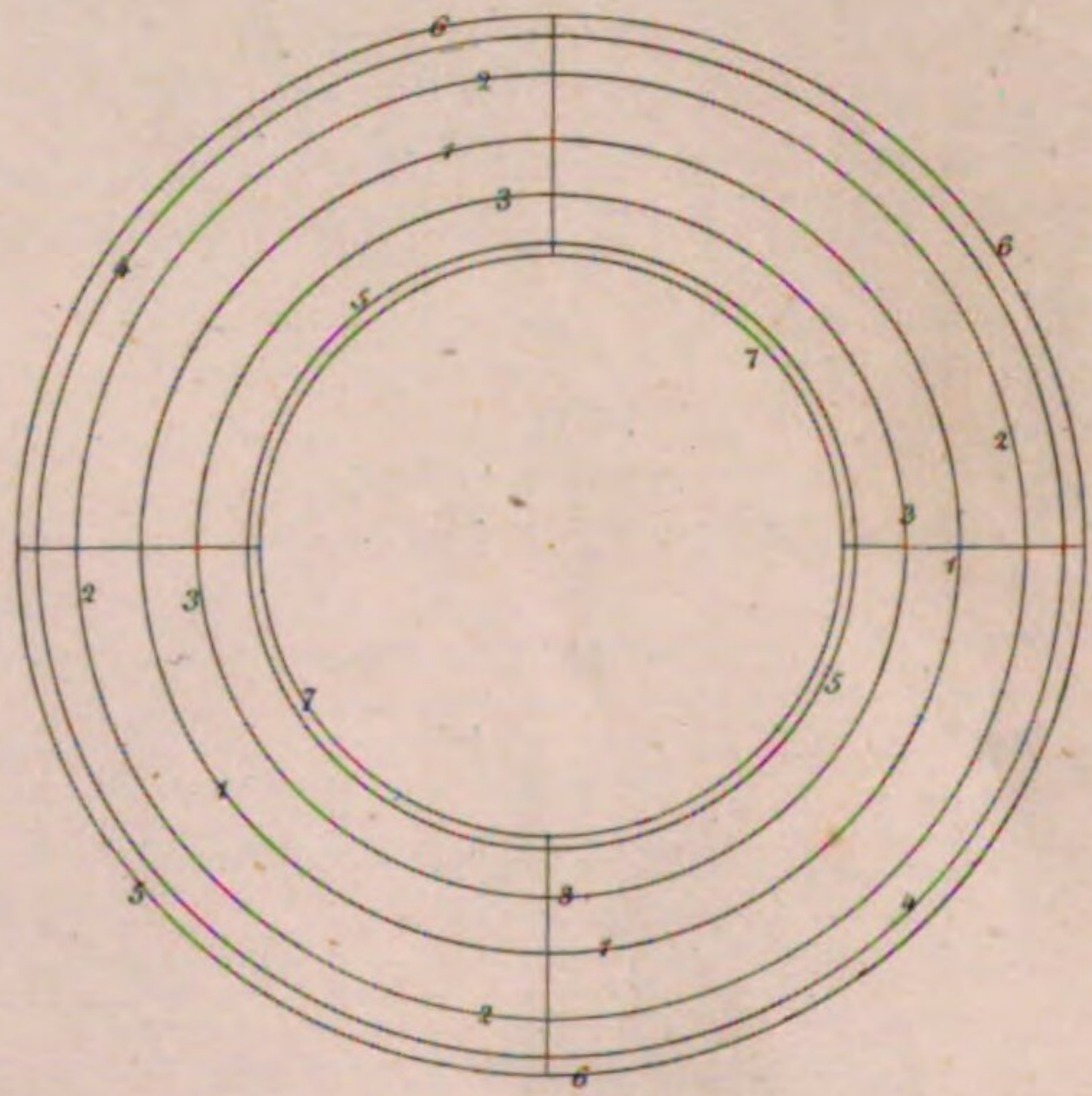
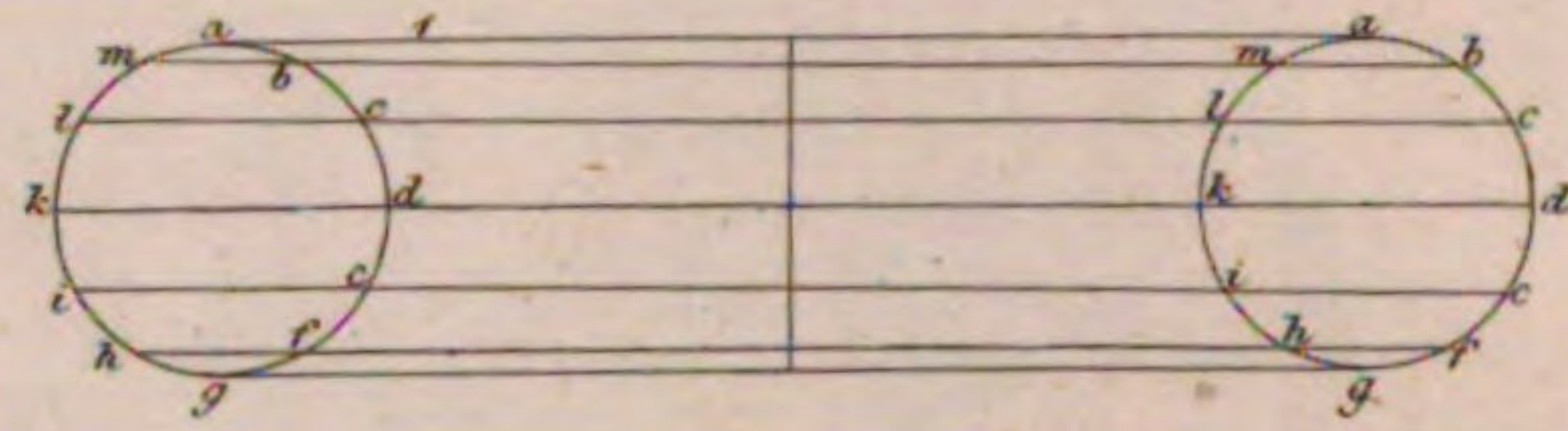


Fig:42.

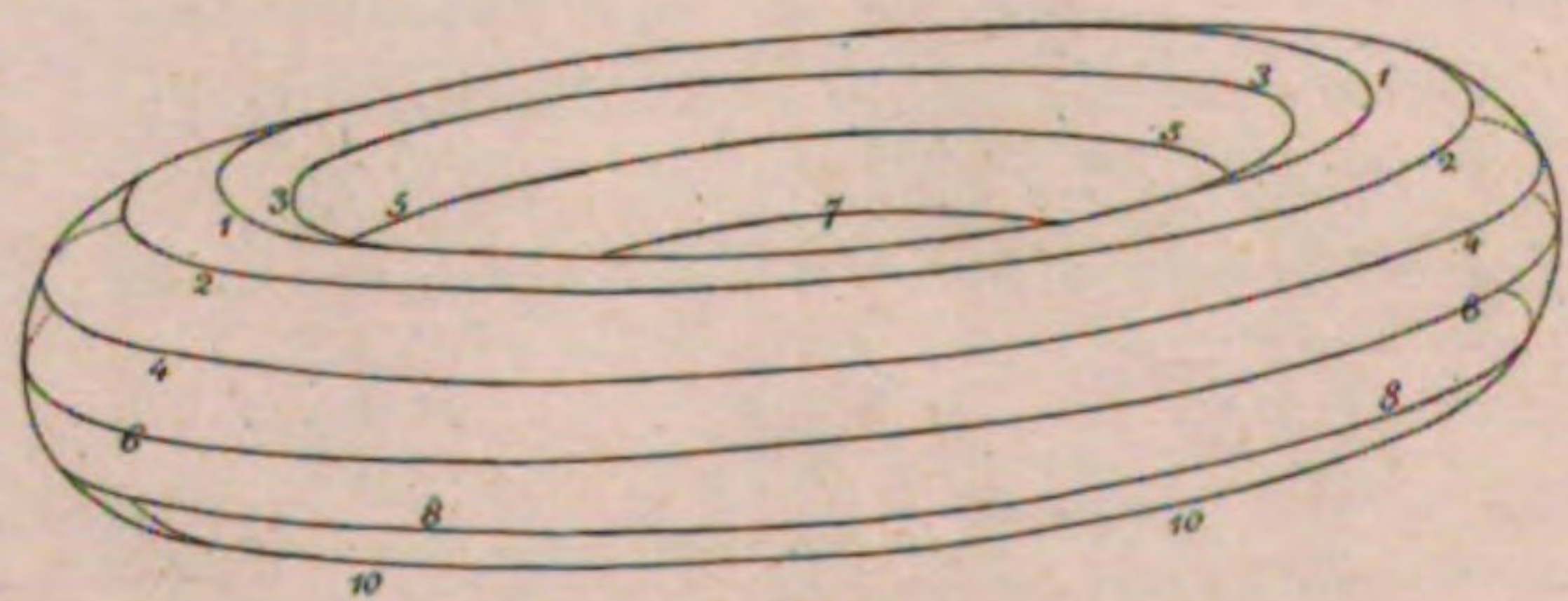


Fig:45.

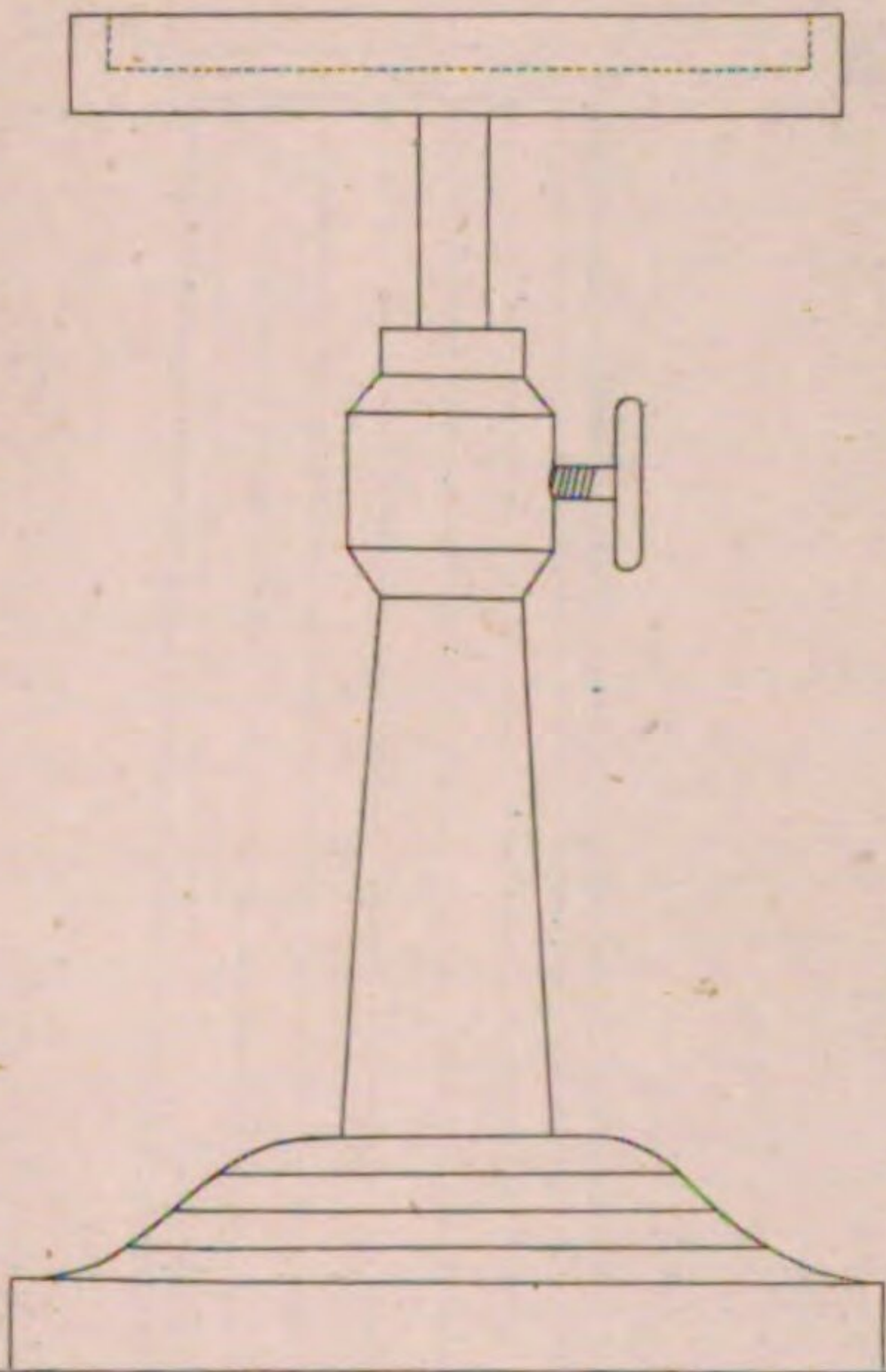


Fig:46.

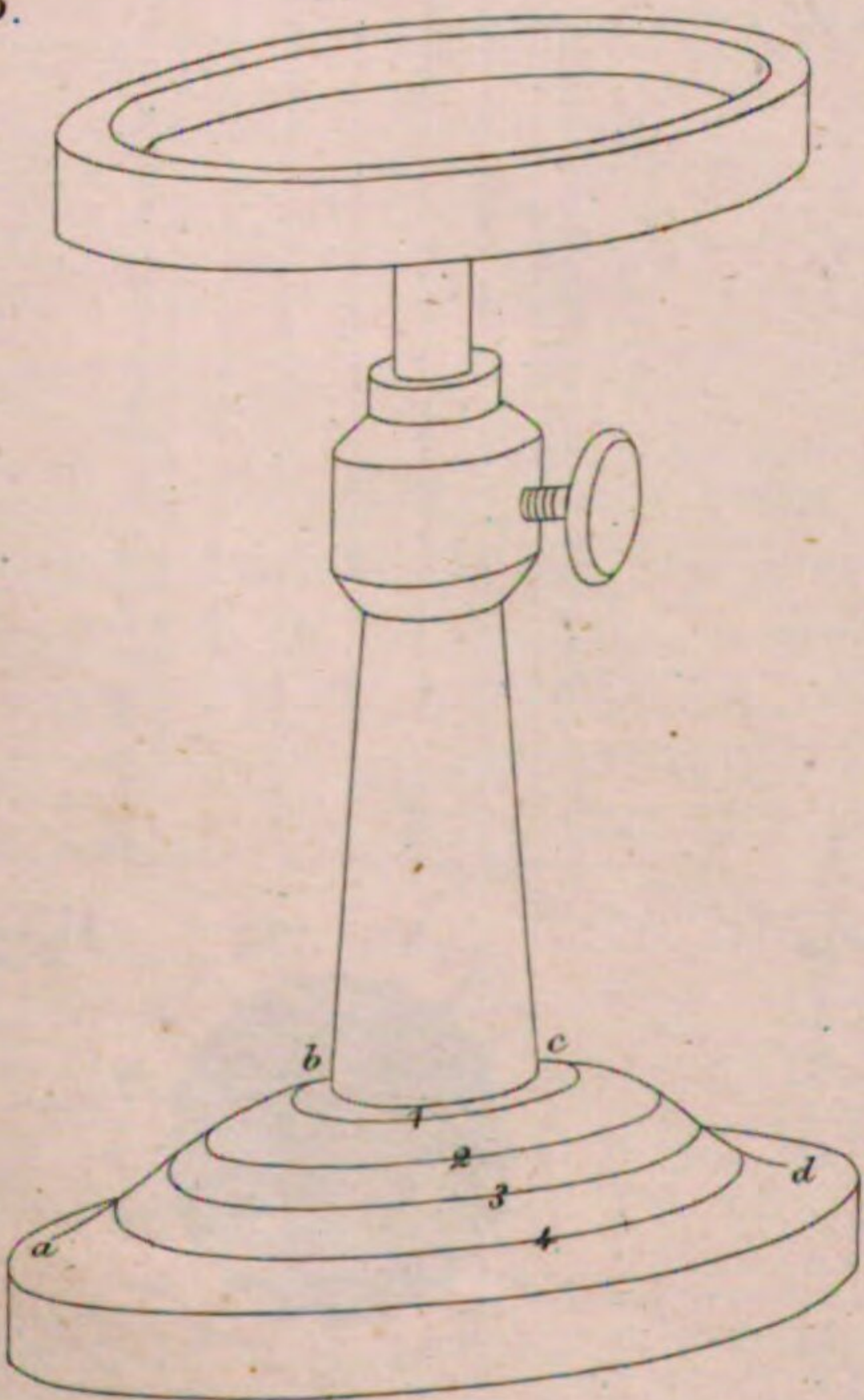


Fig:47.

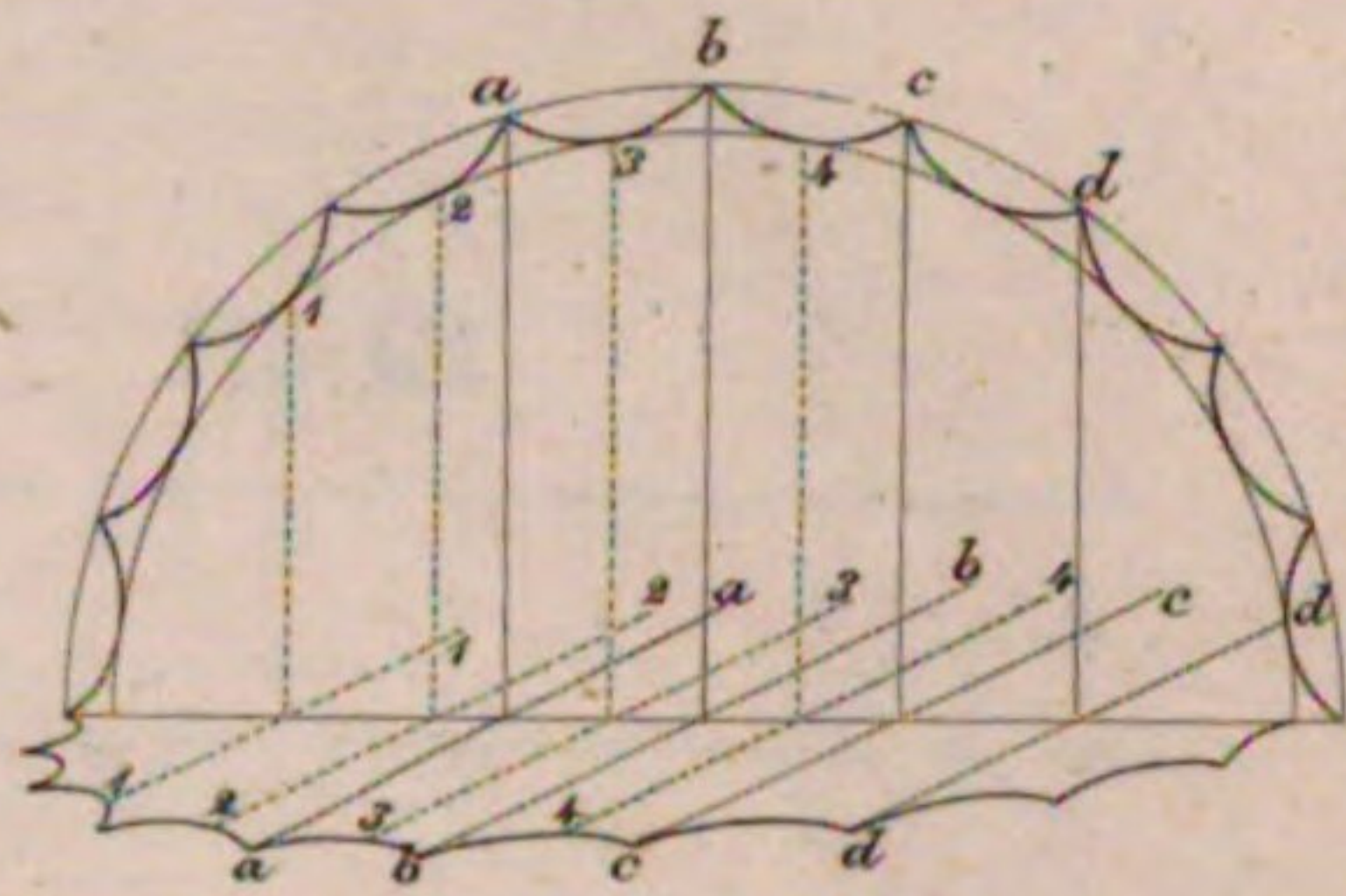


Fig:43.

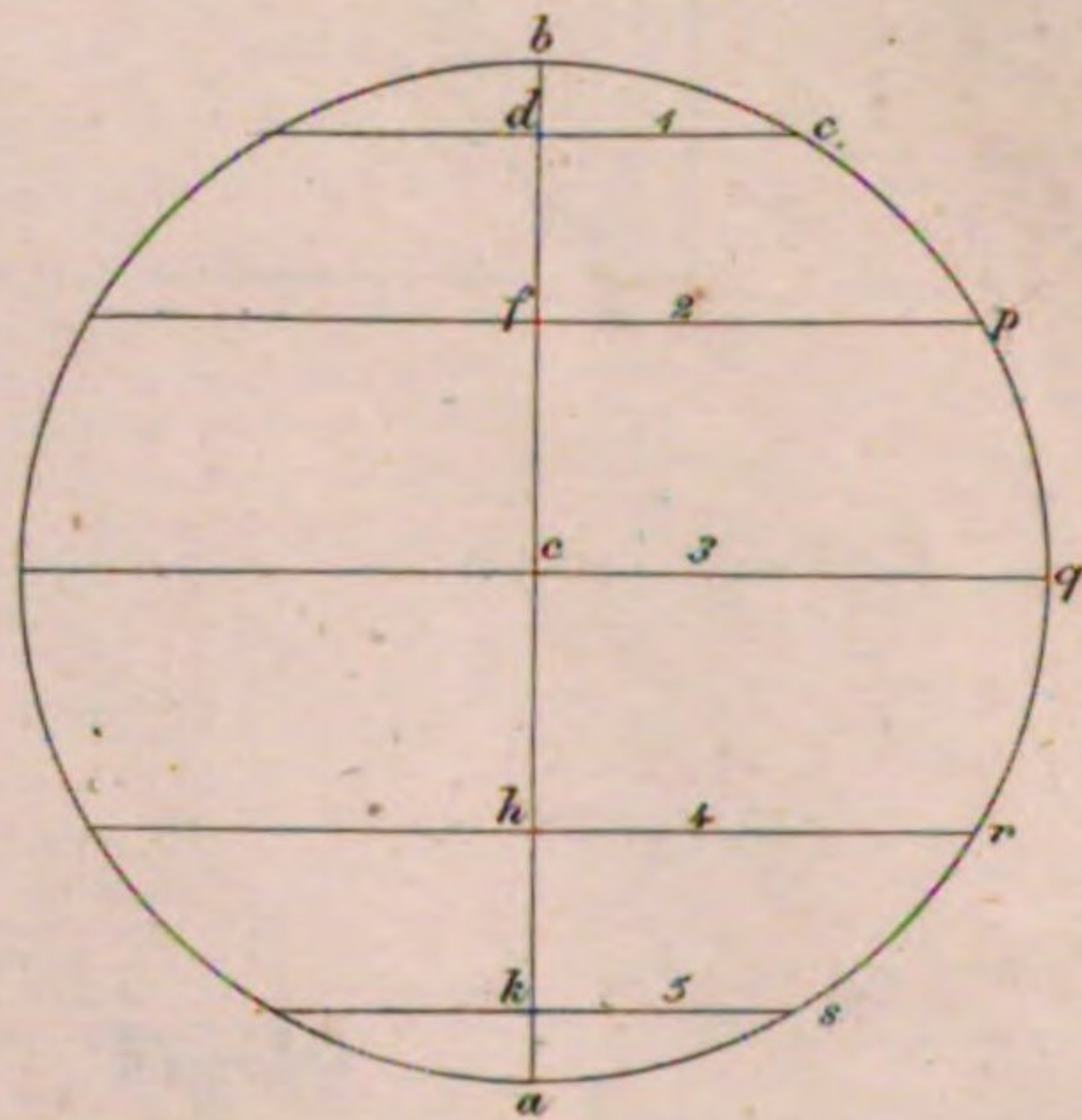


Fig:44.

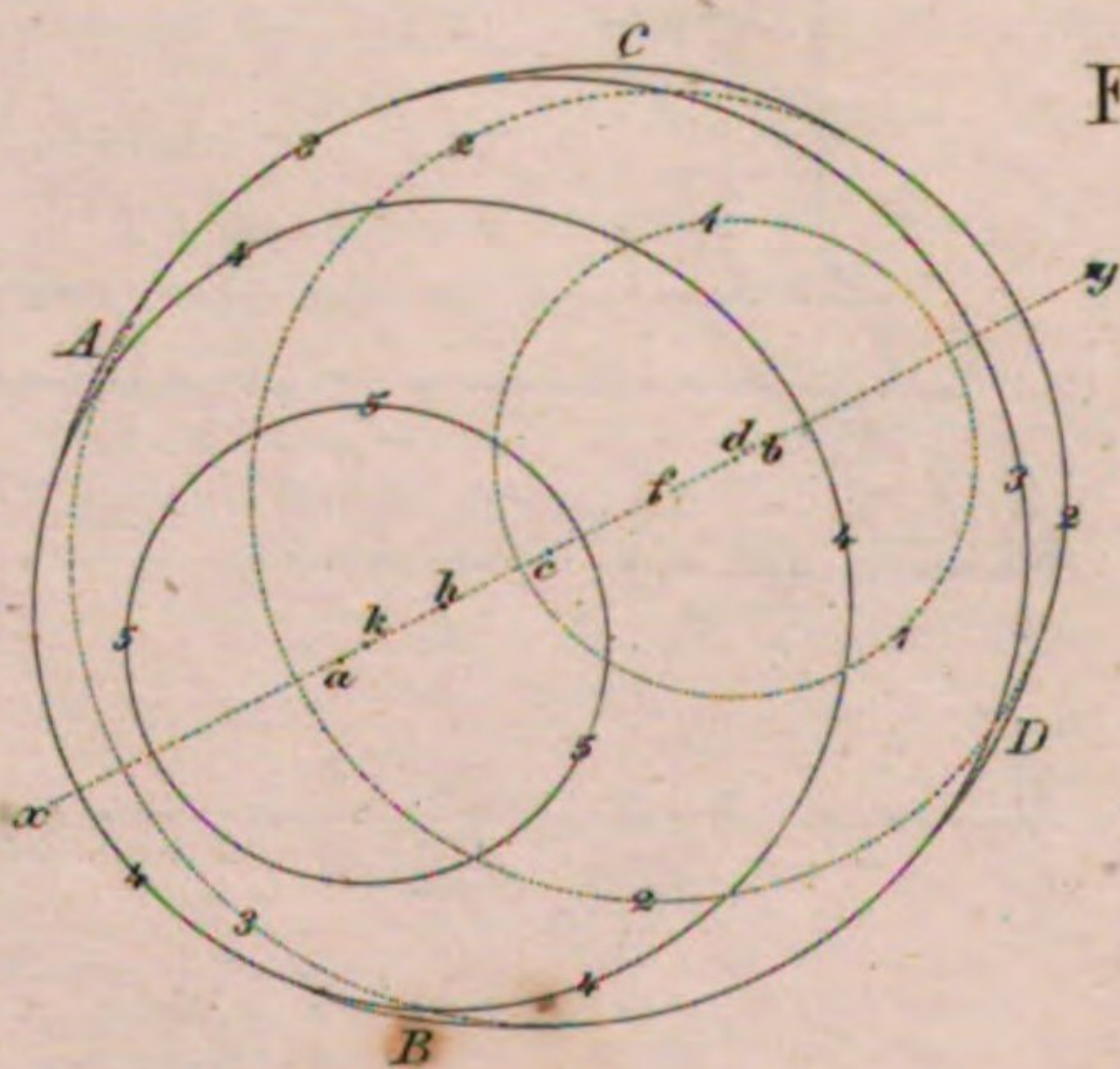


Fig. 50.

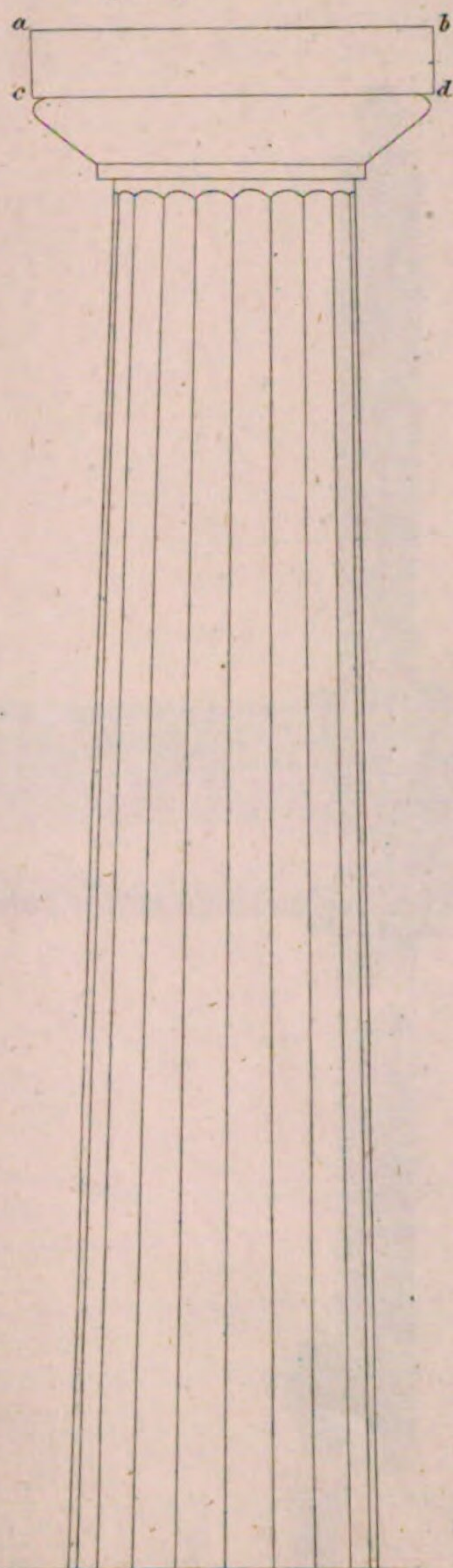


Fig. 48.

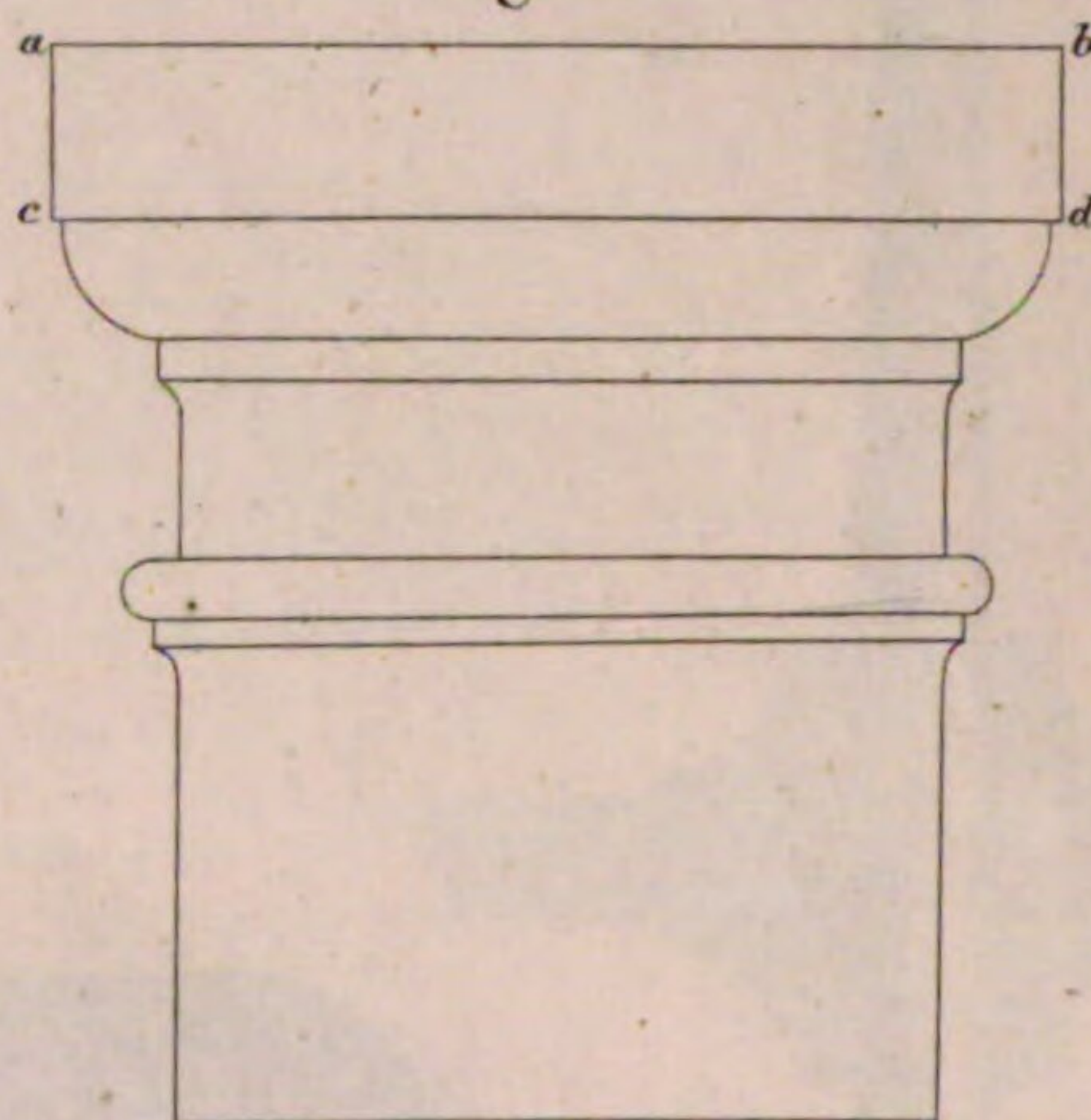


Fig. 49.

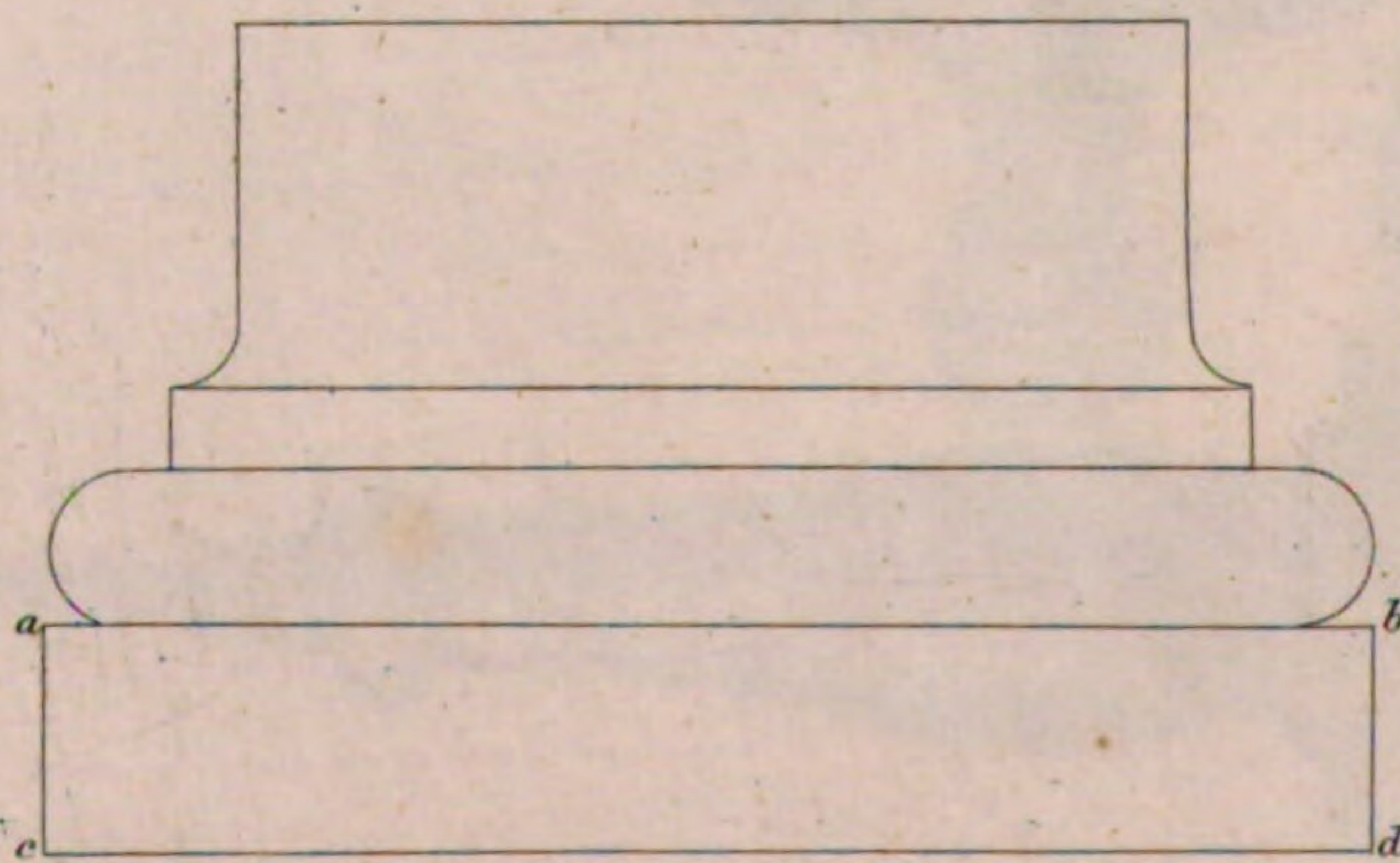


Fig. 51.

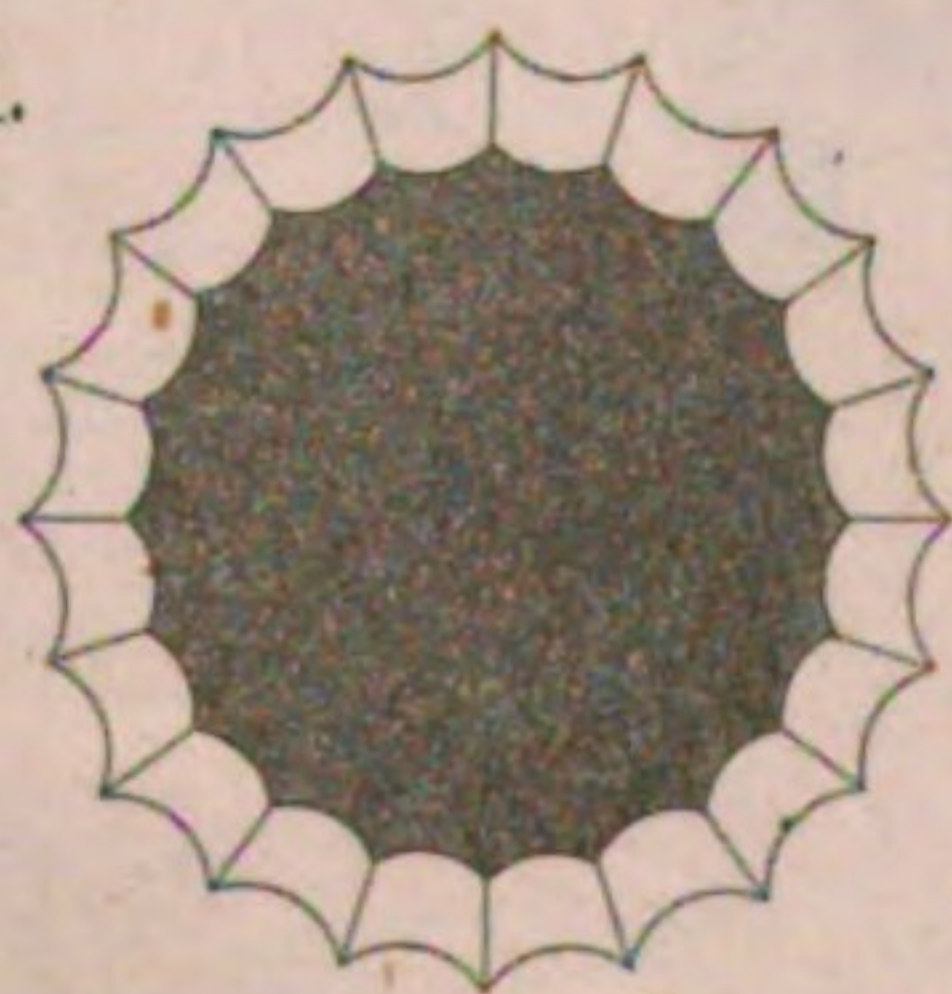


Fig. 52.

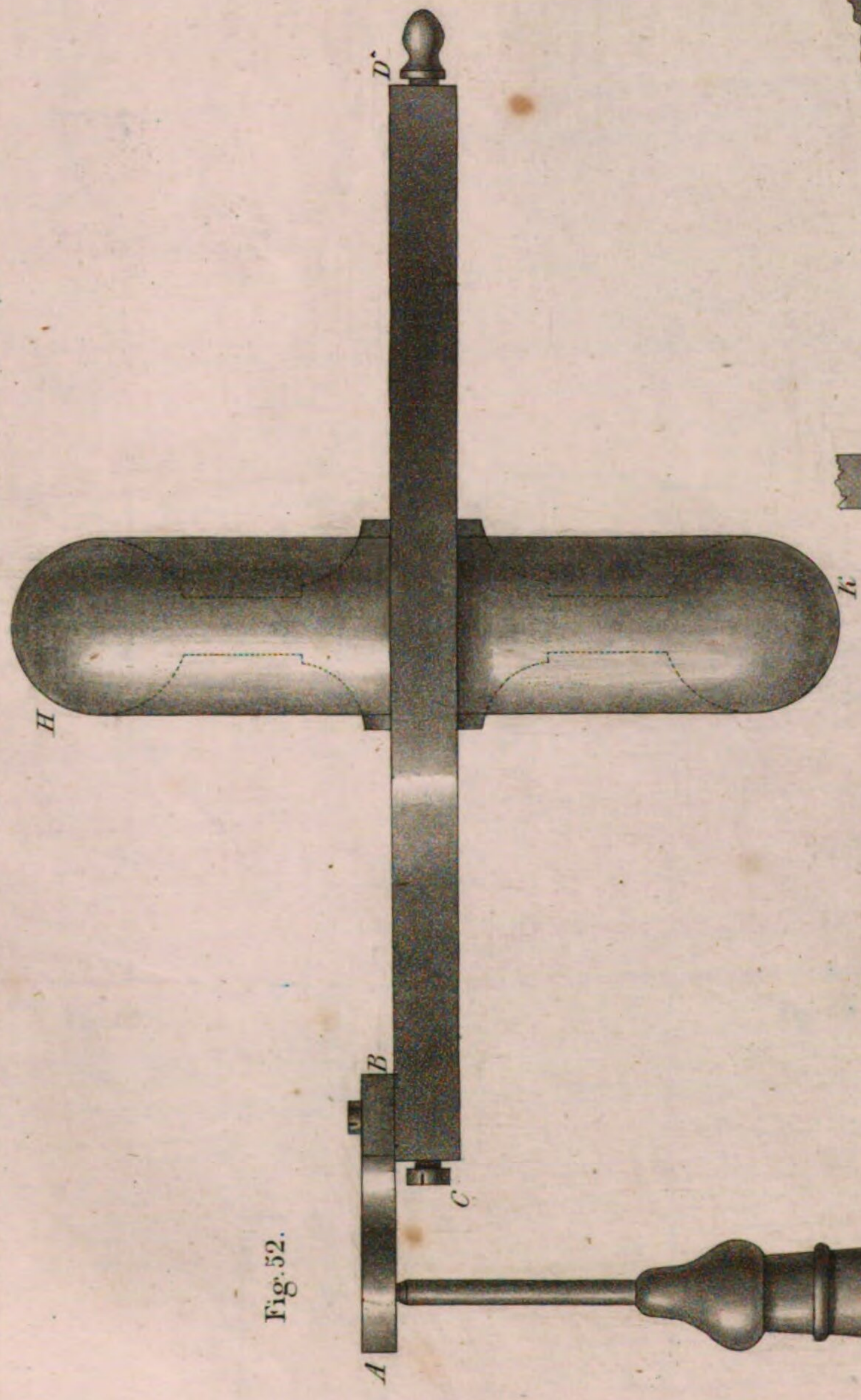


Fig. 53.

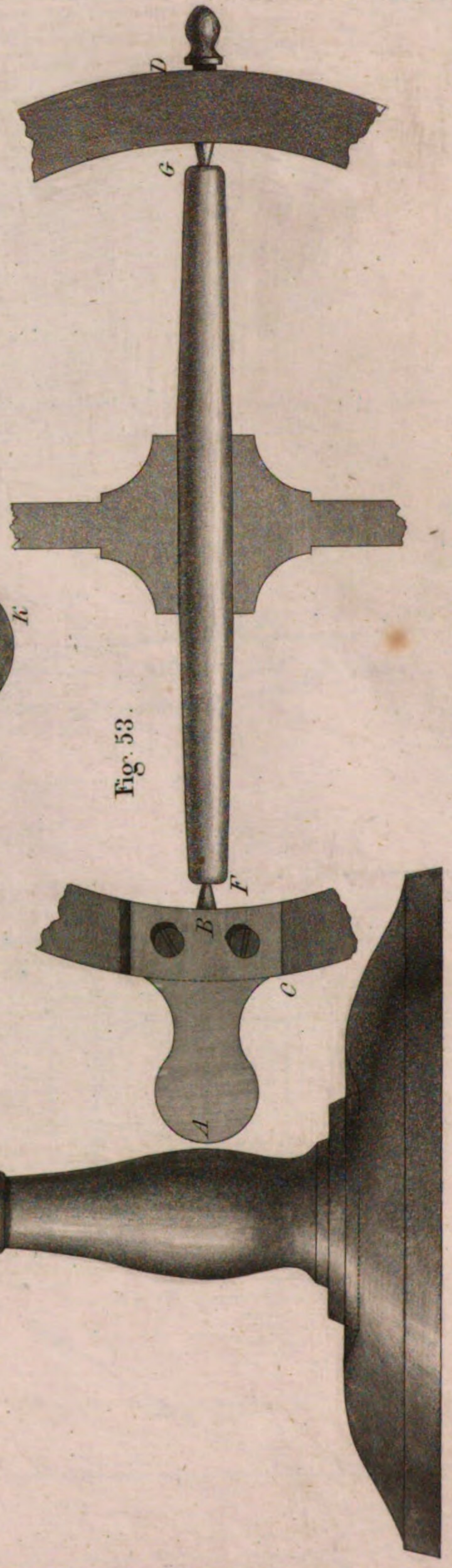


Fig 54.

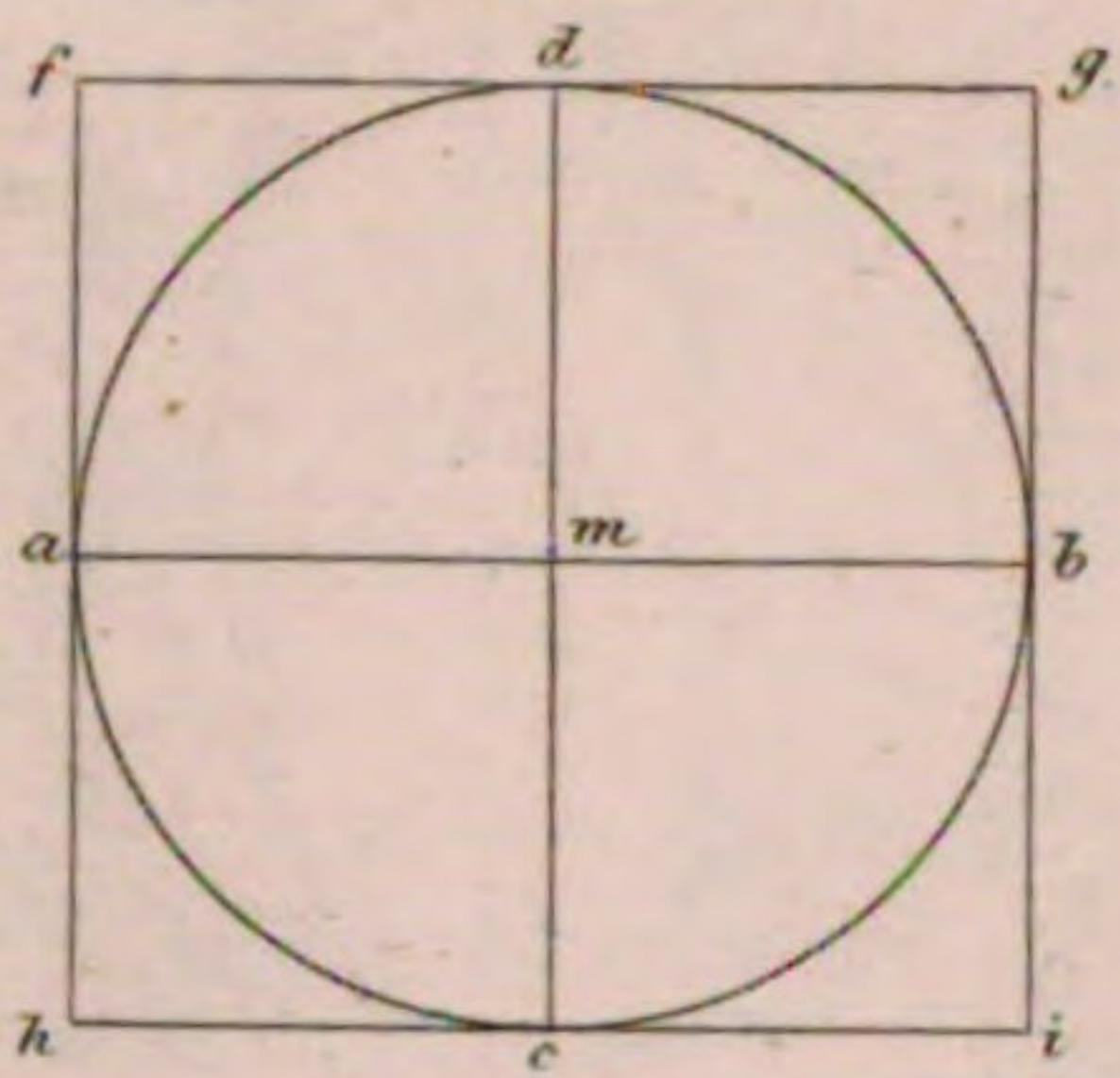


Fig.55.

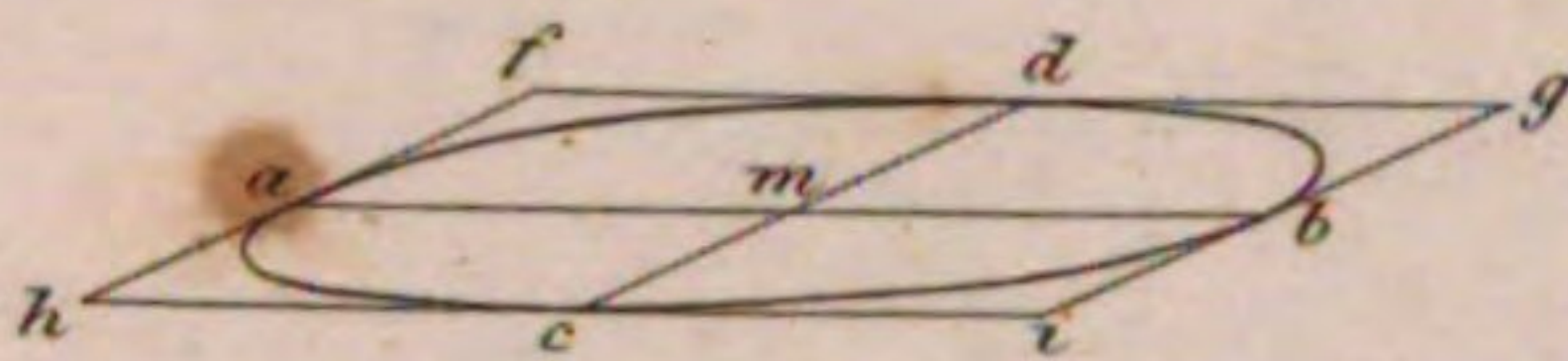


Fig 56.

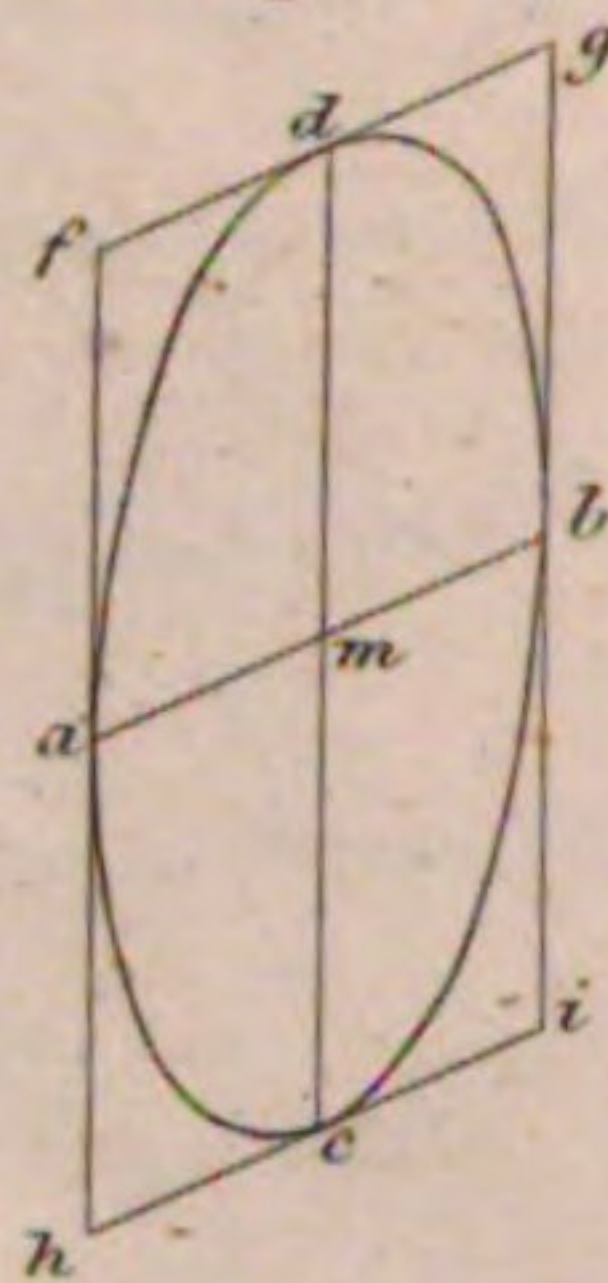


Fig 57.

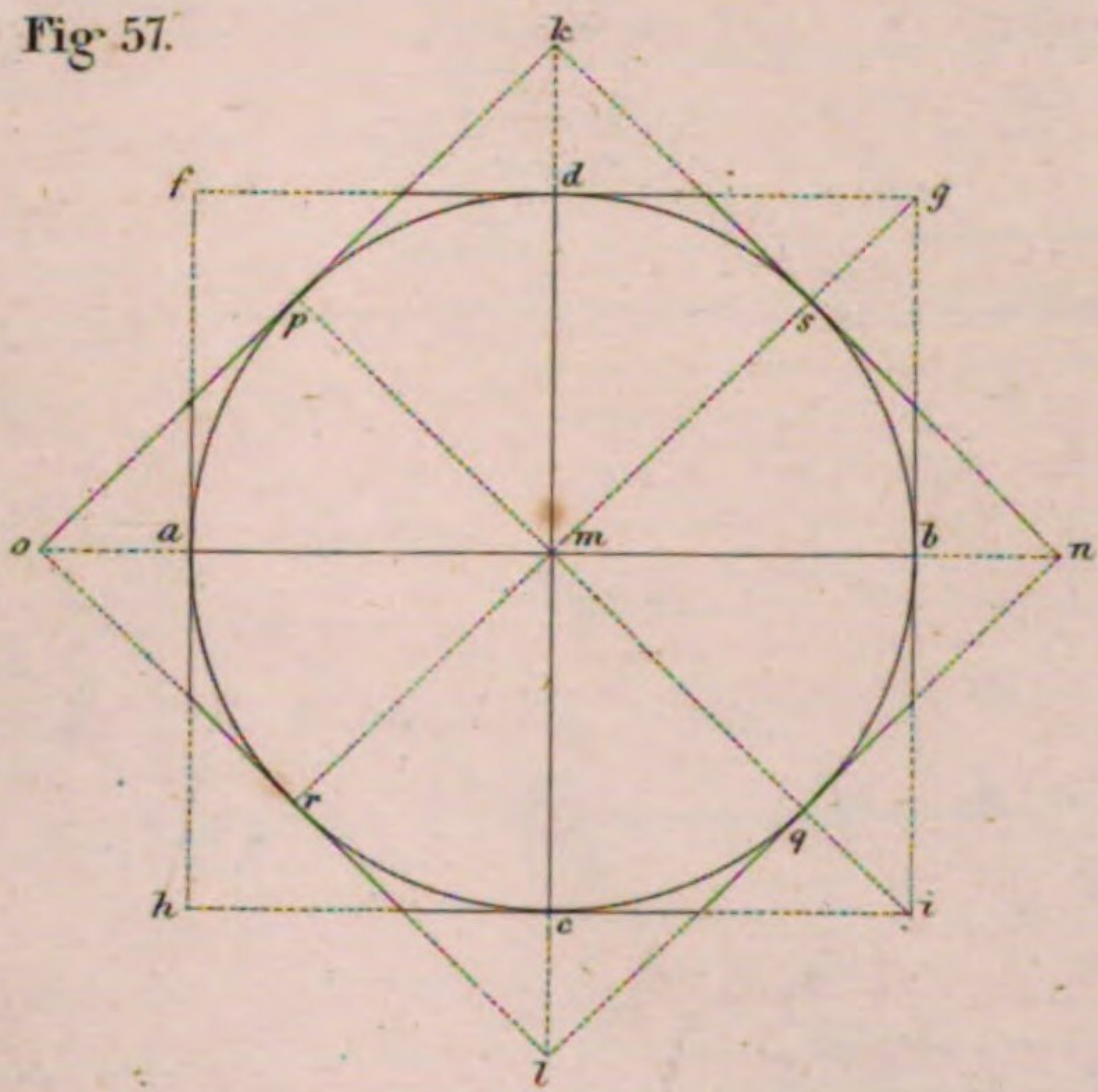


Fig.58.

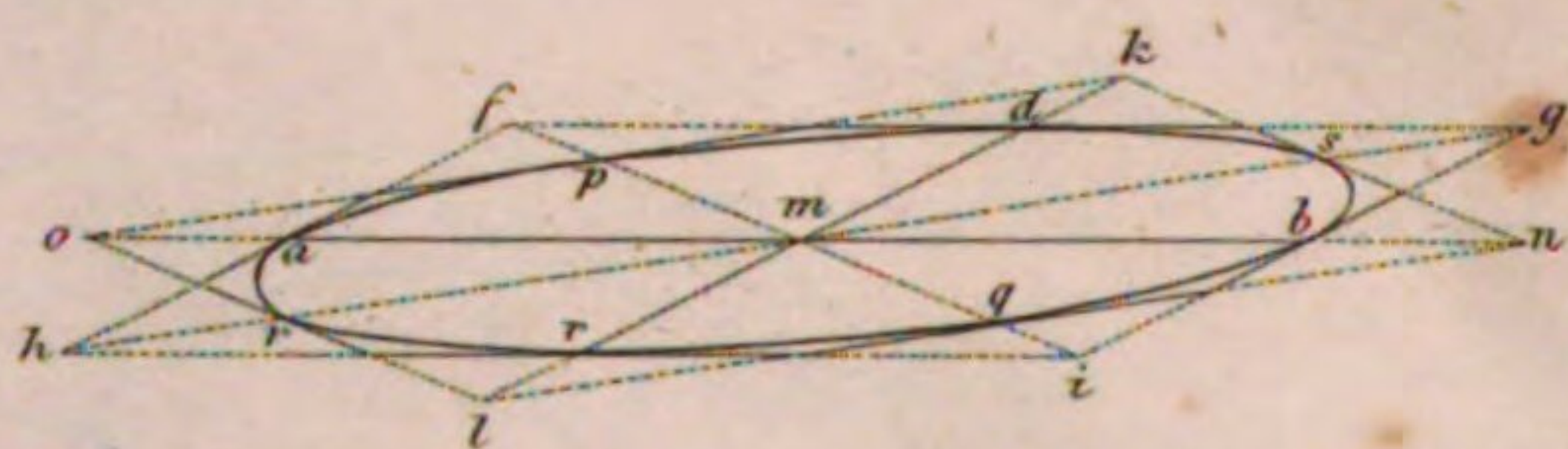


Fig.59.

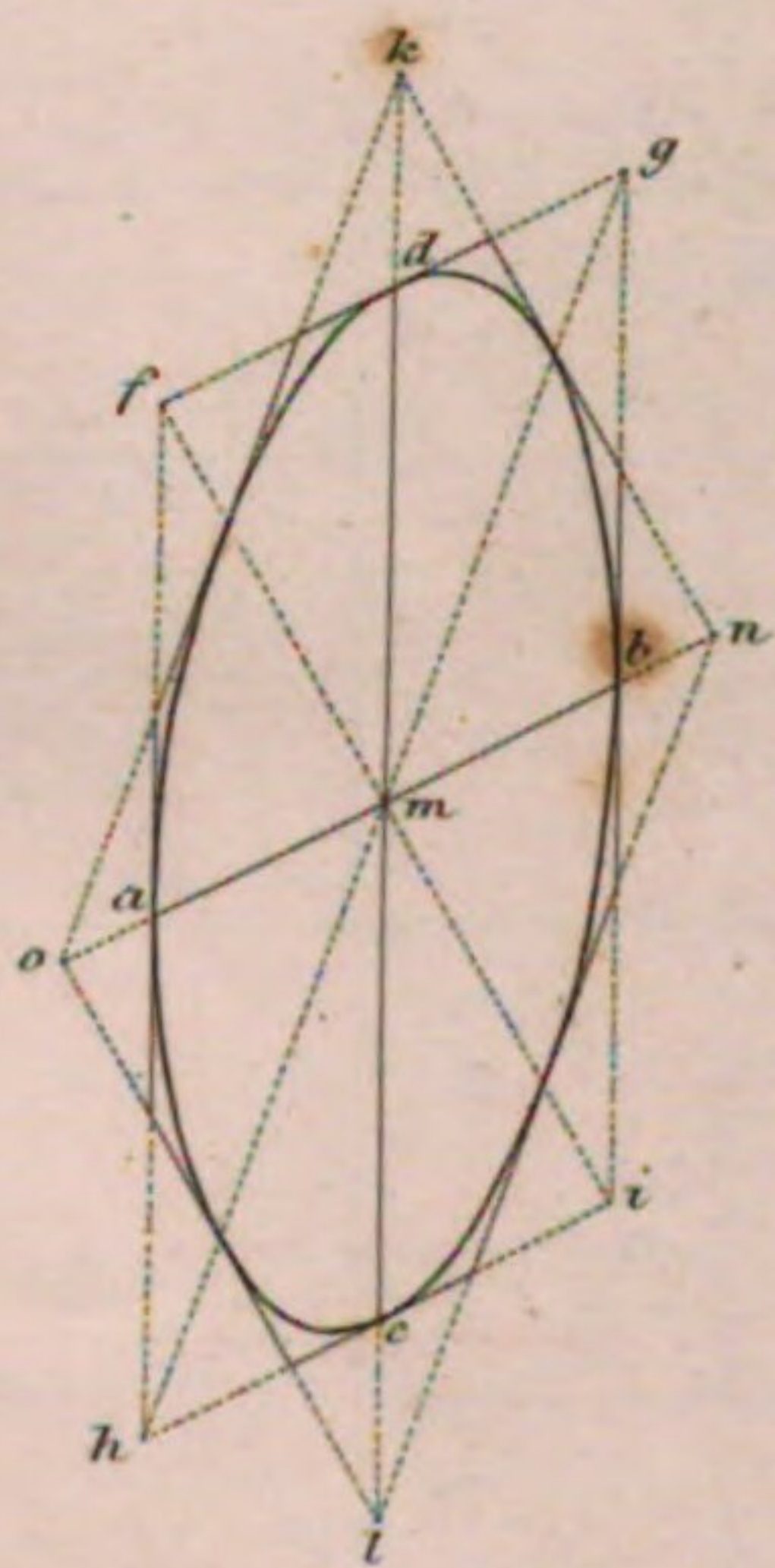
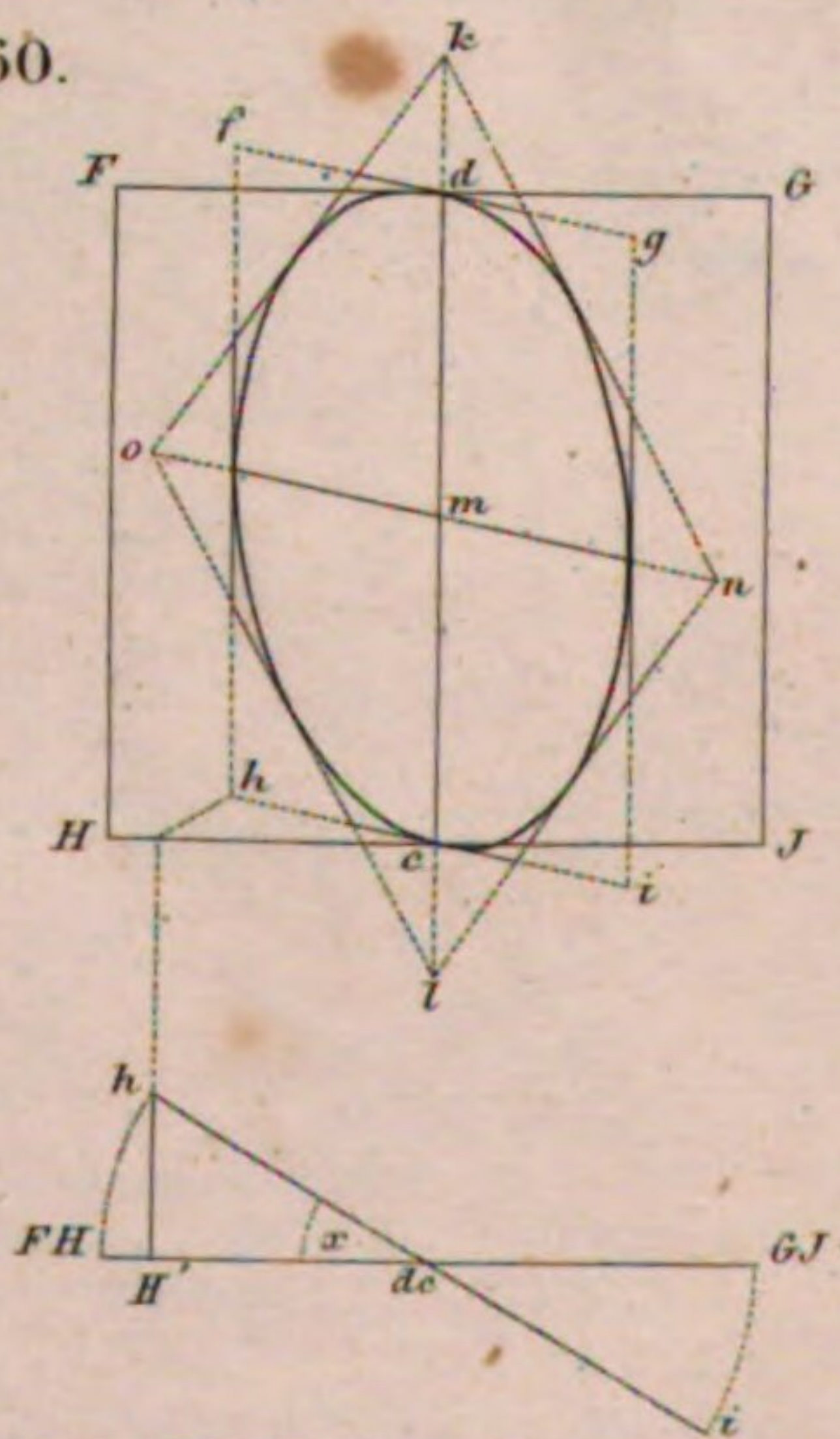
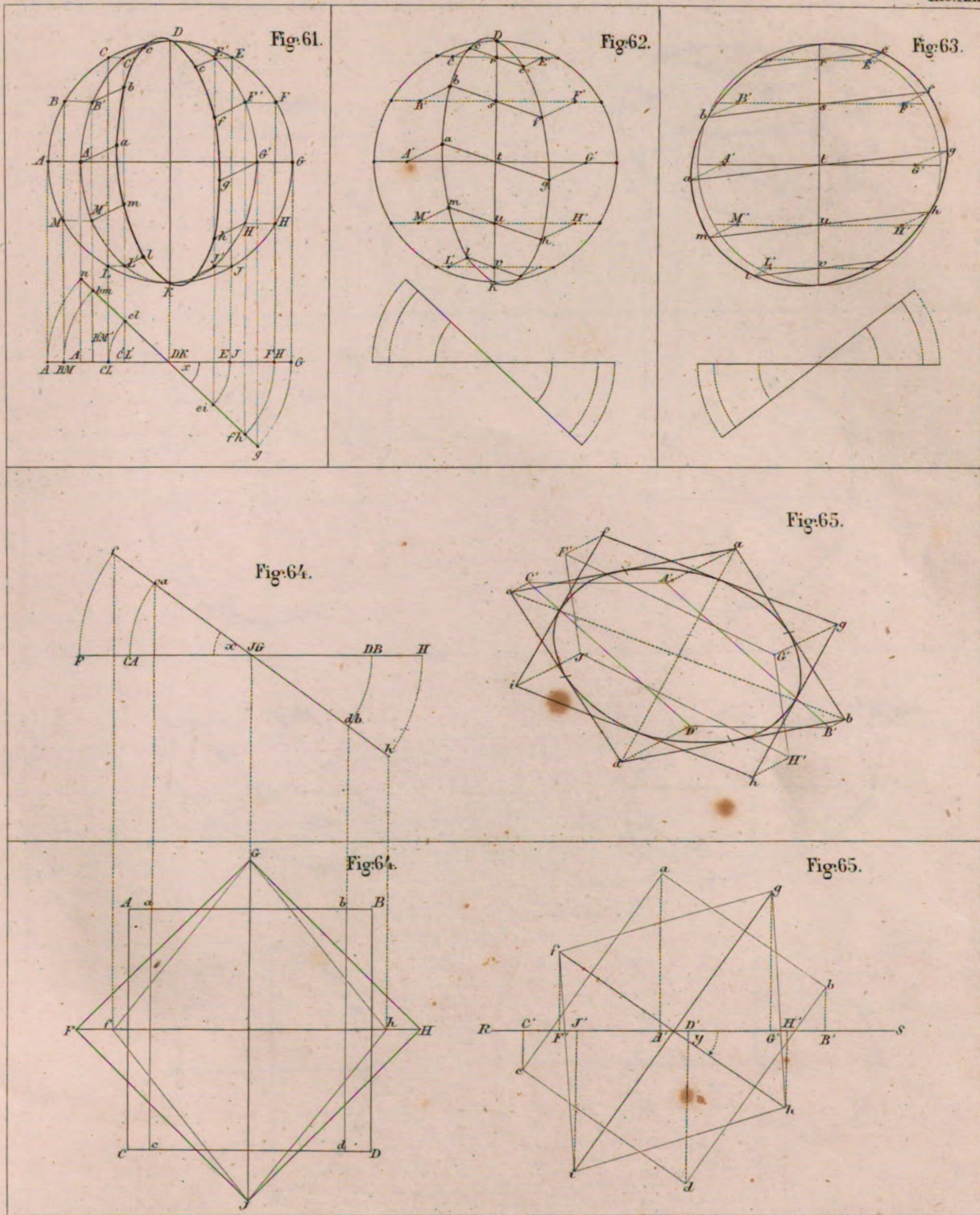


Fig.60.





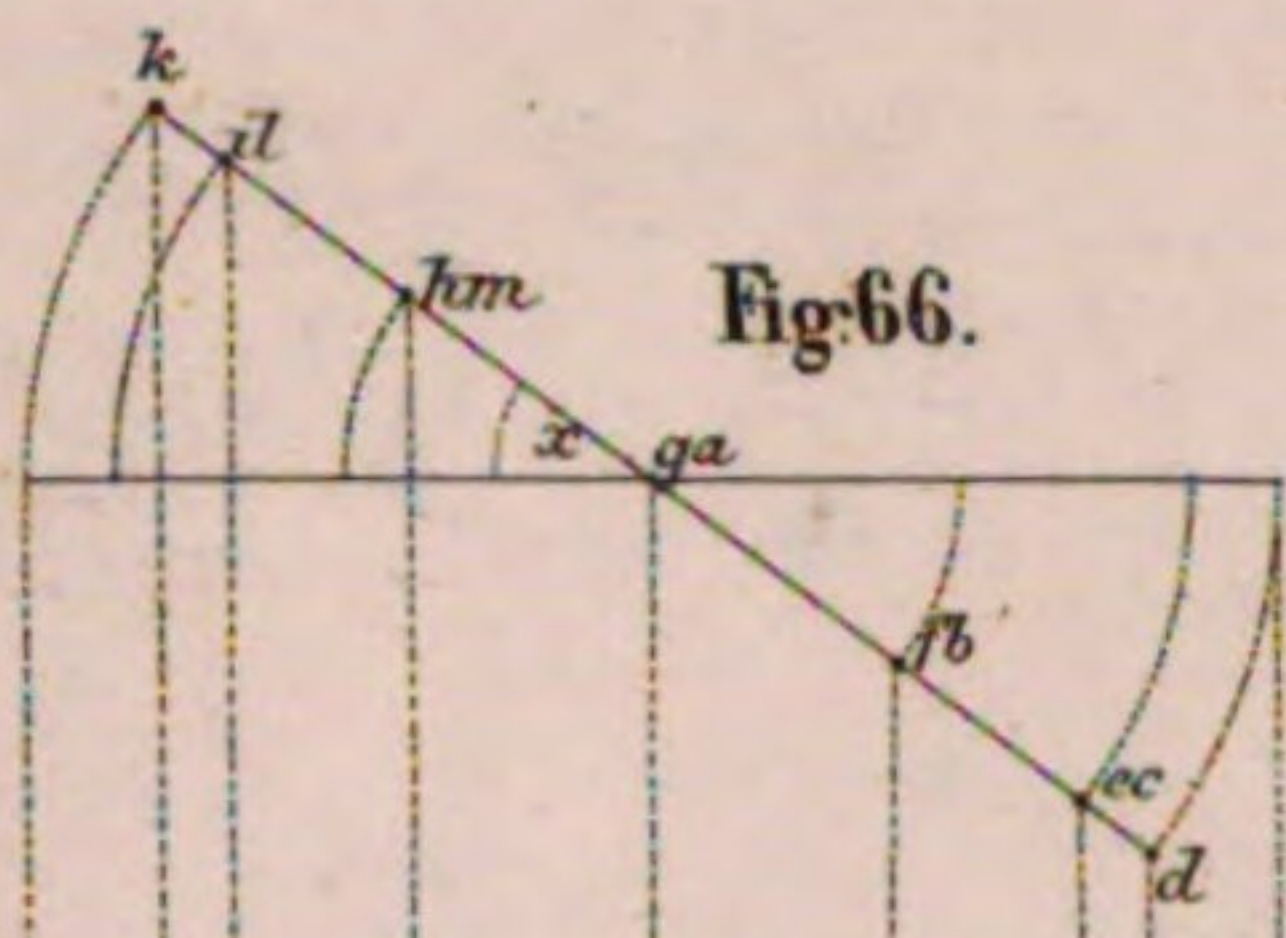


Fig. 66.

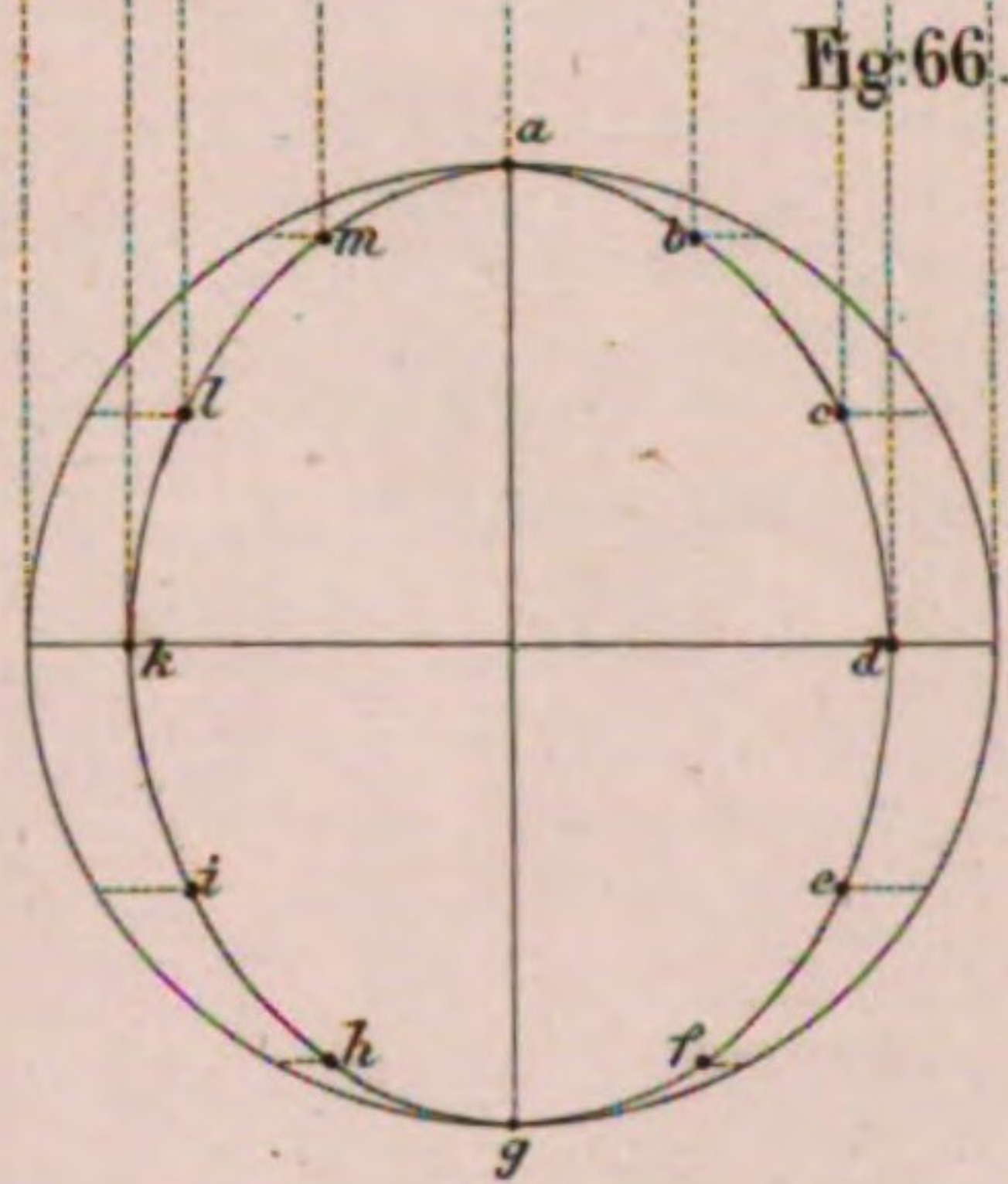


Fig. 66.

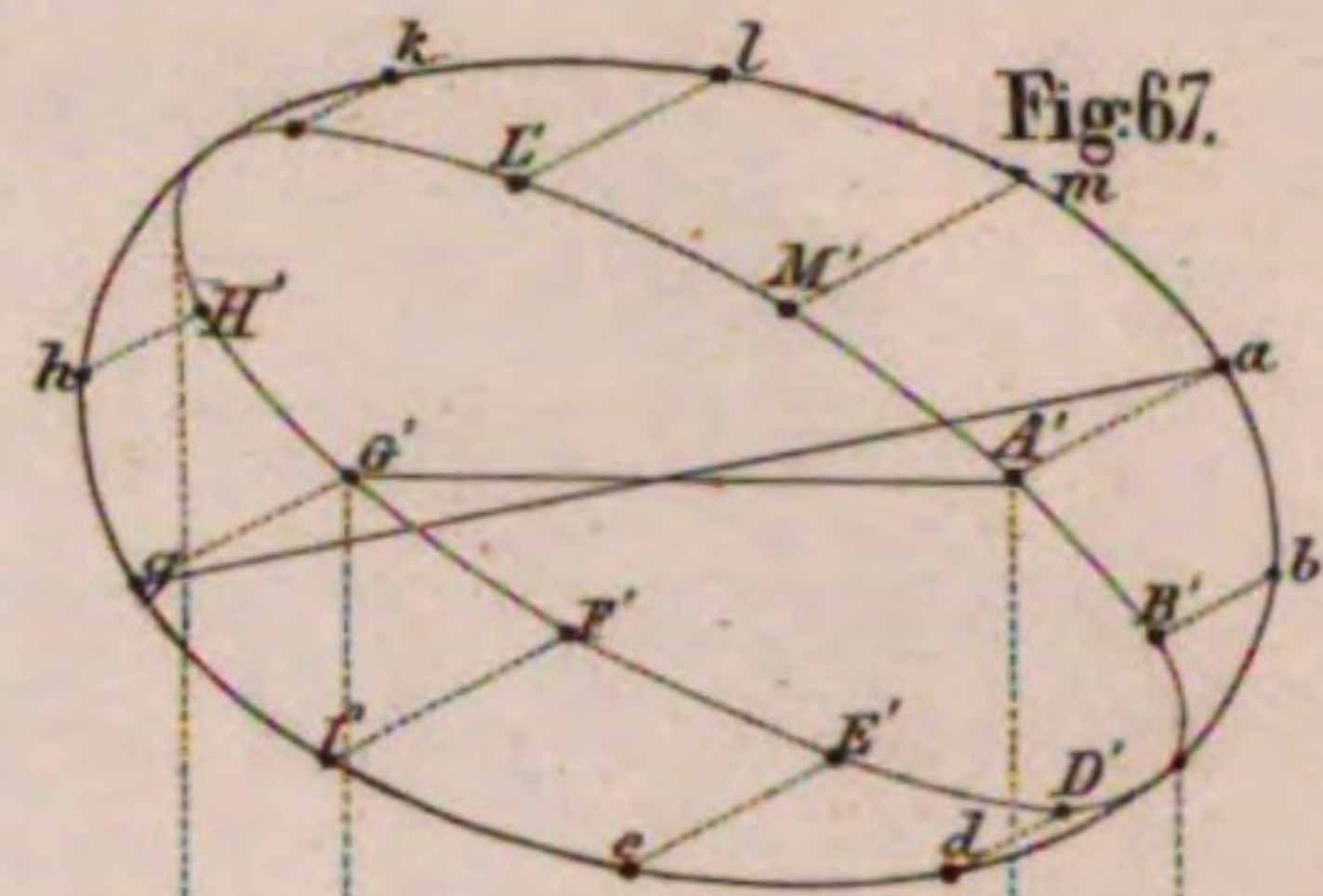


Fig. 67.

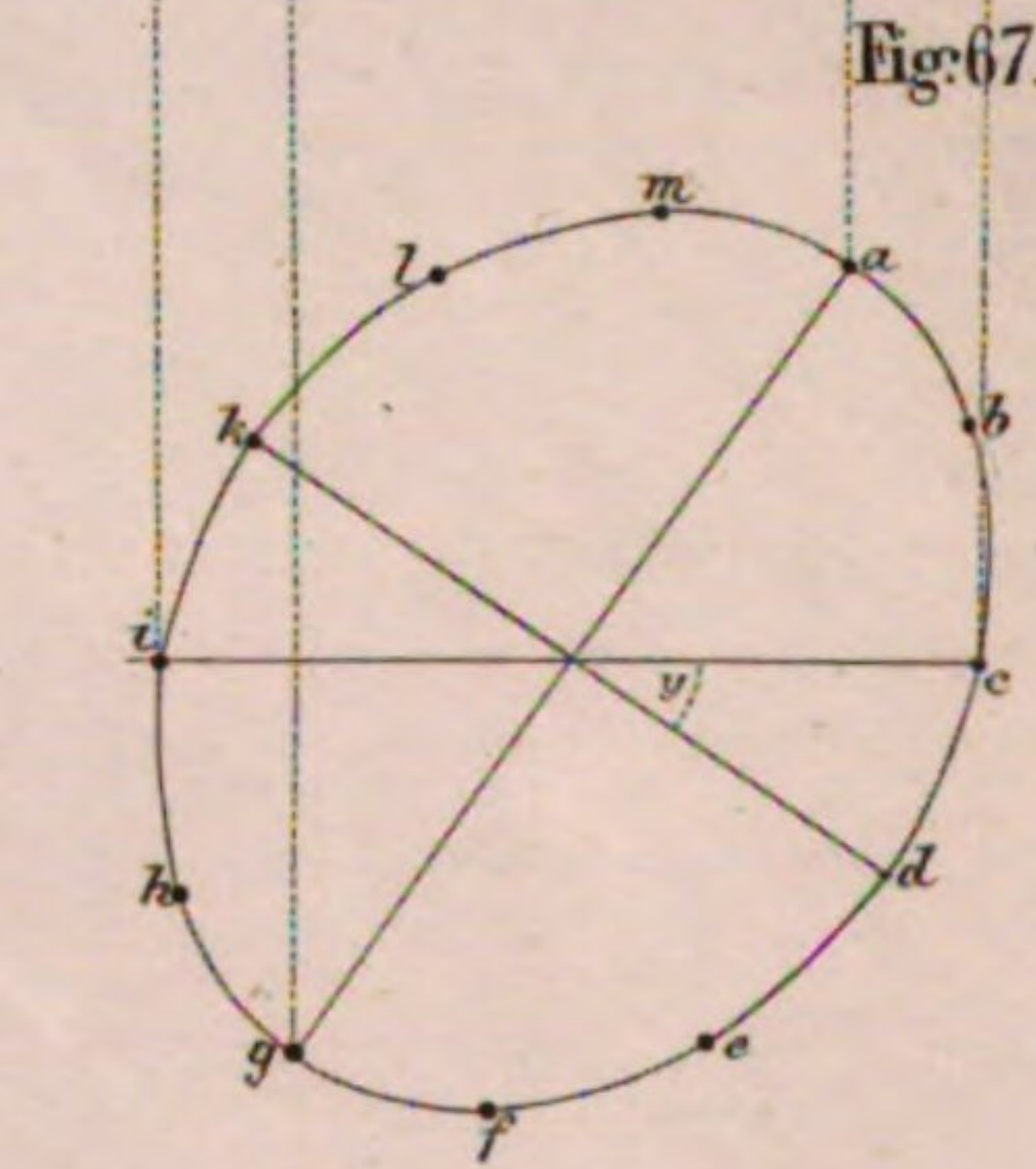


Fig. 67.

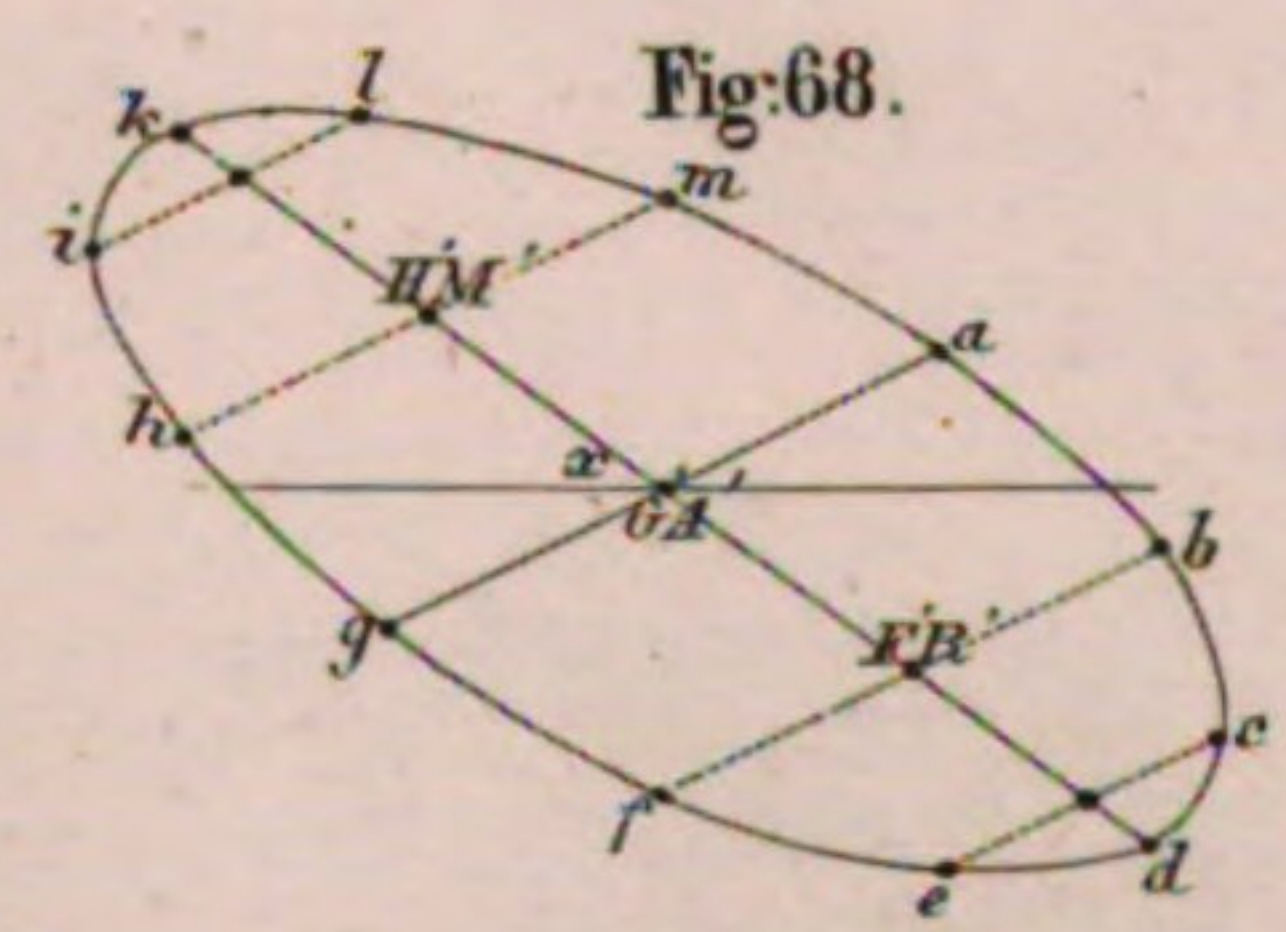


Fig. 68.

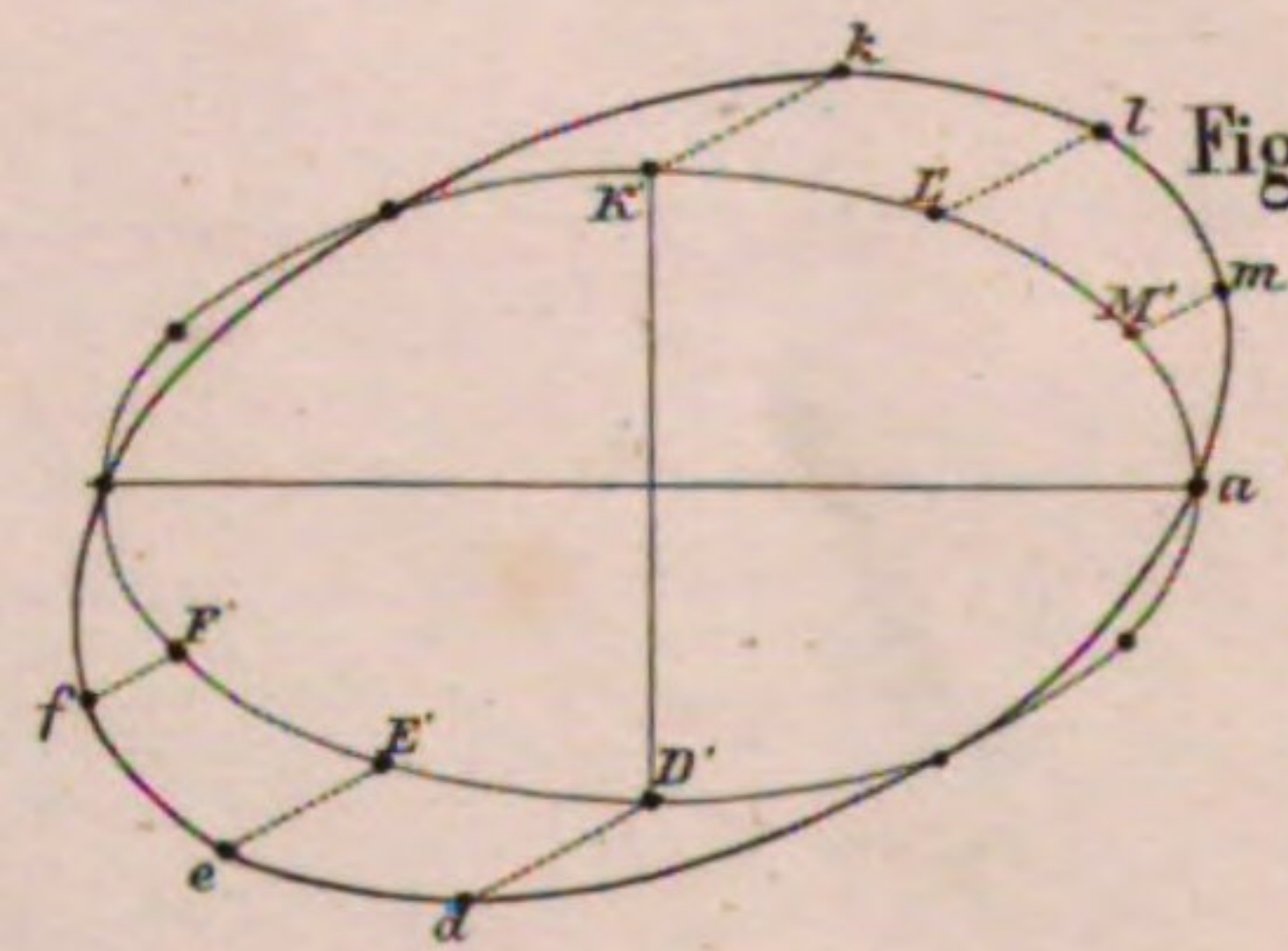
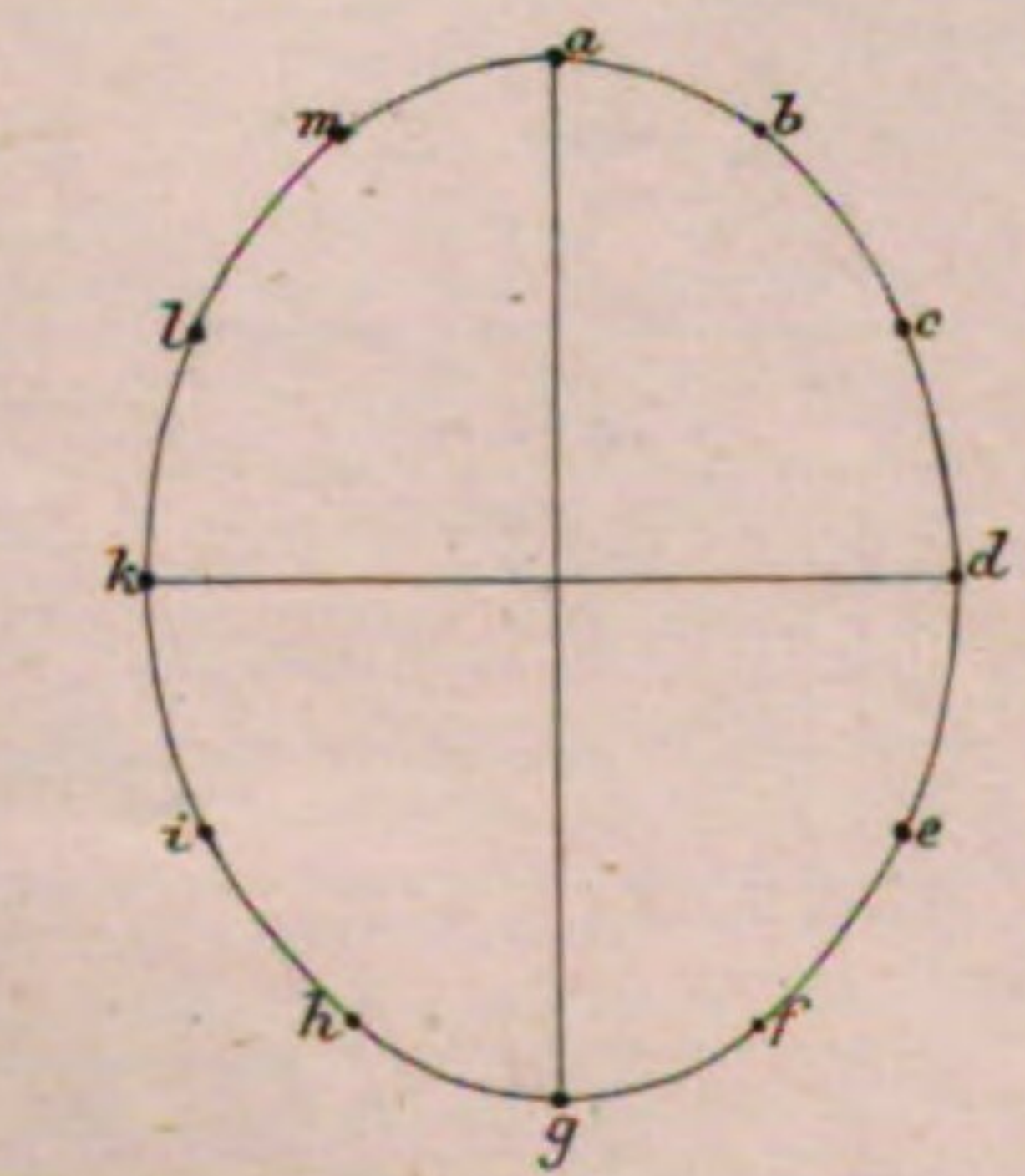


Fig. 69.

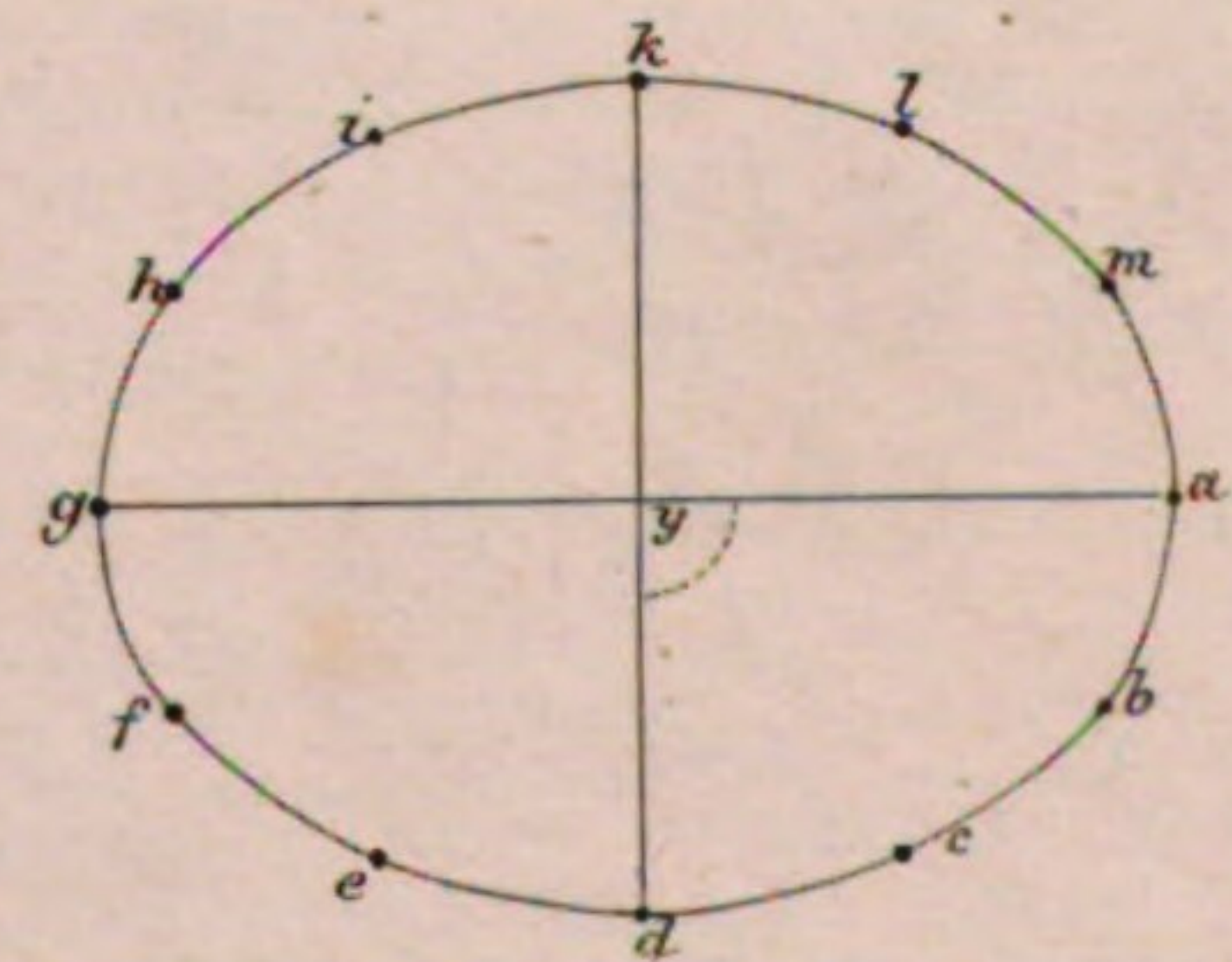


Fig. 70.

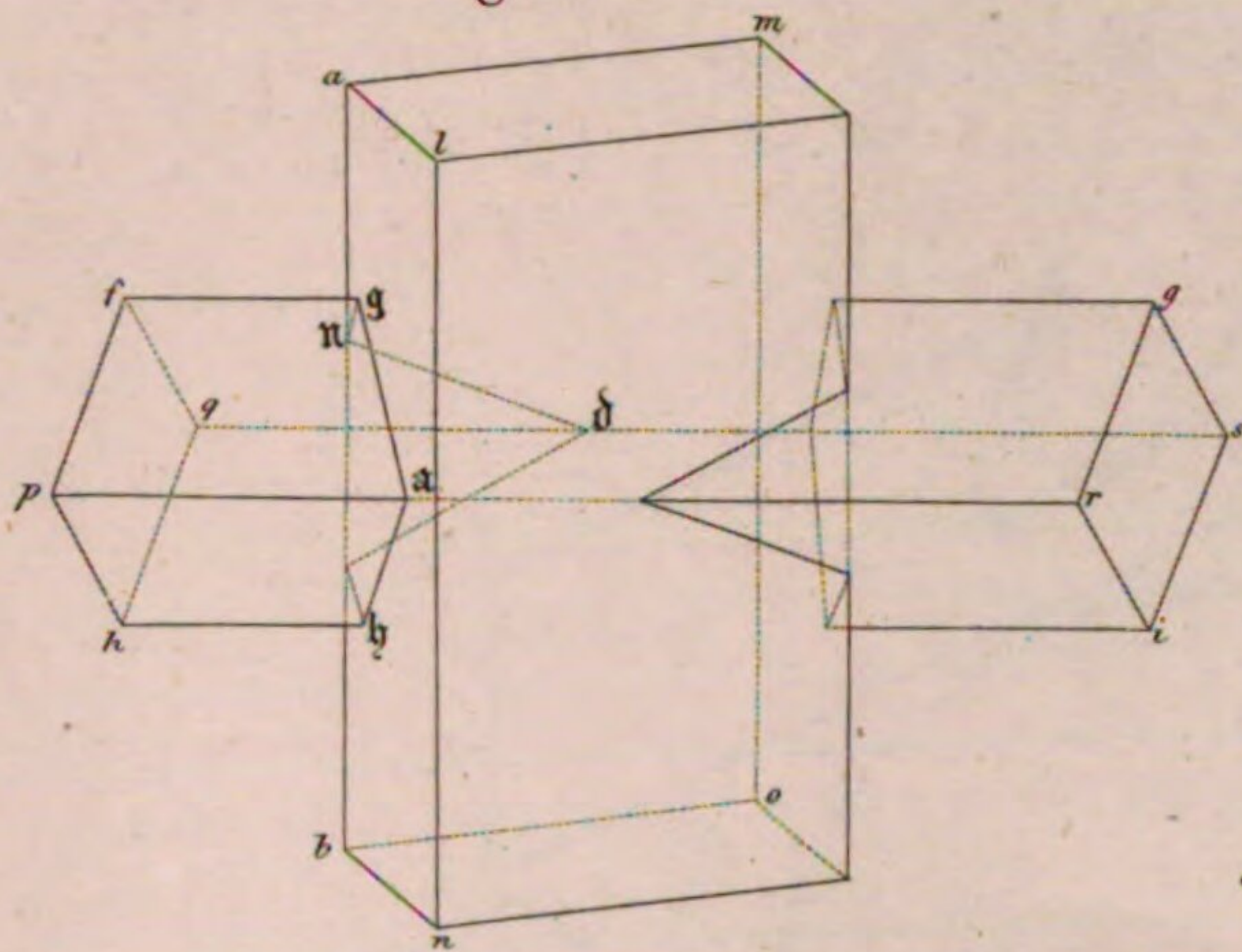


Fig. 71.

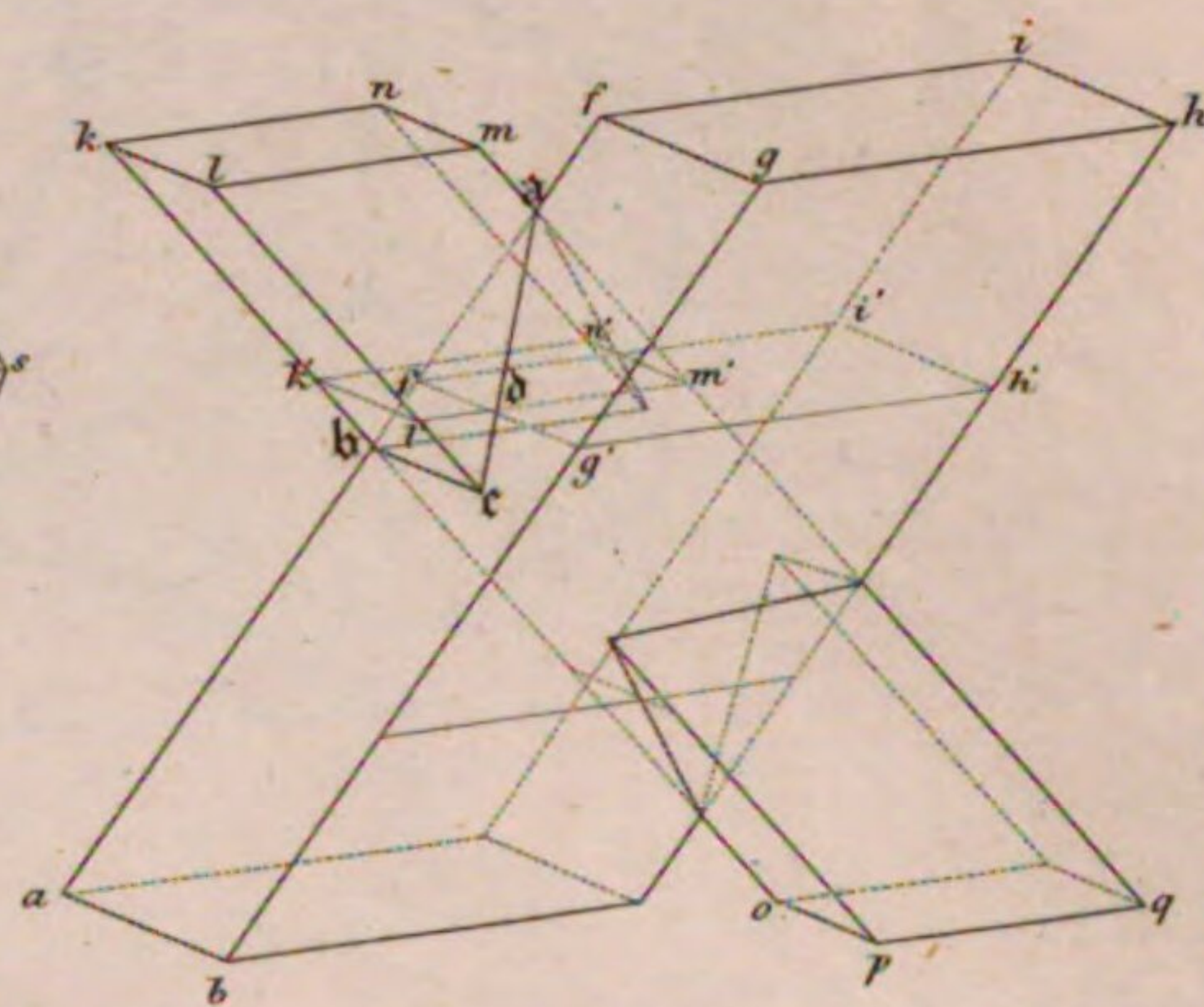


Fig. 72.

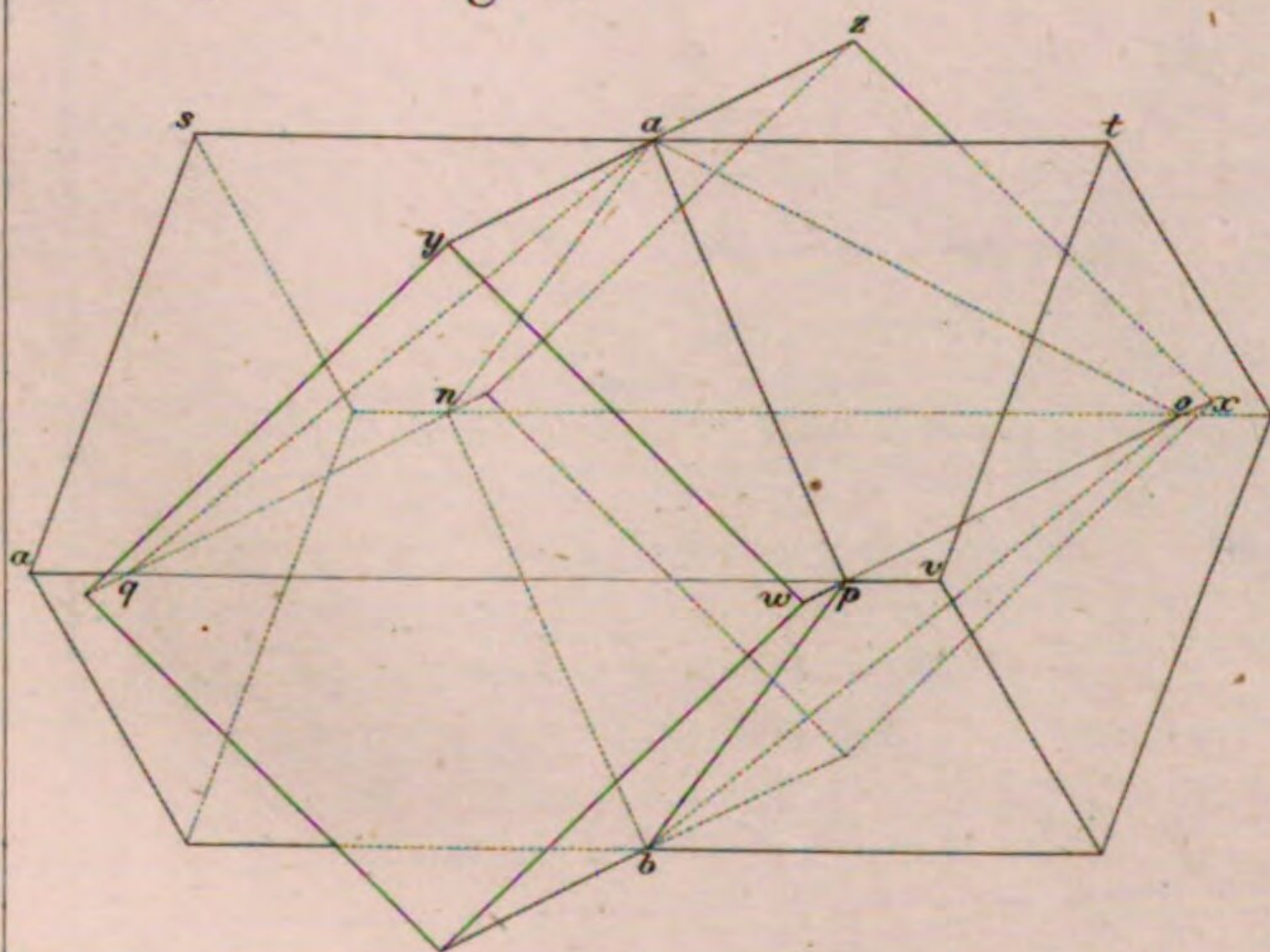


Fig. 73.

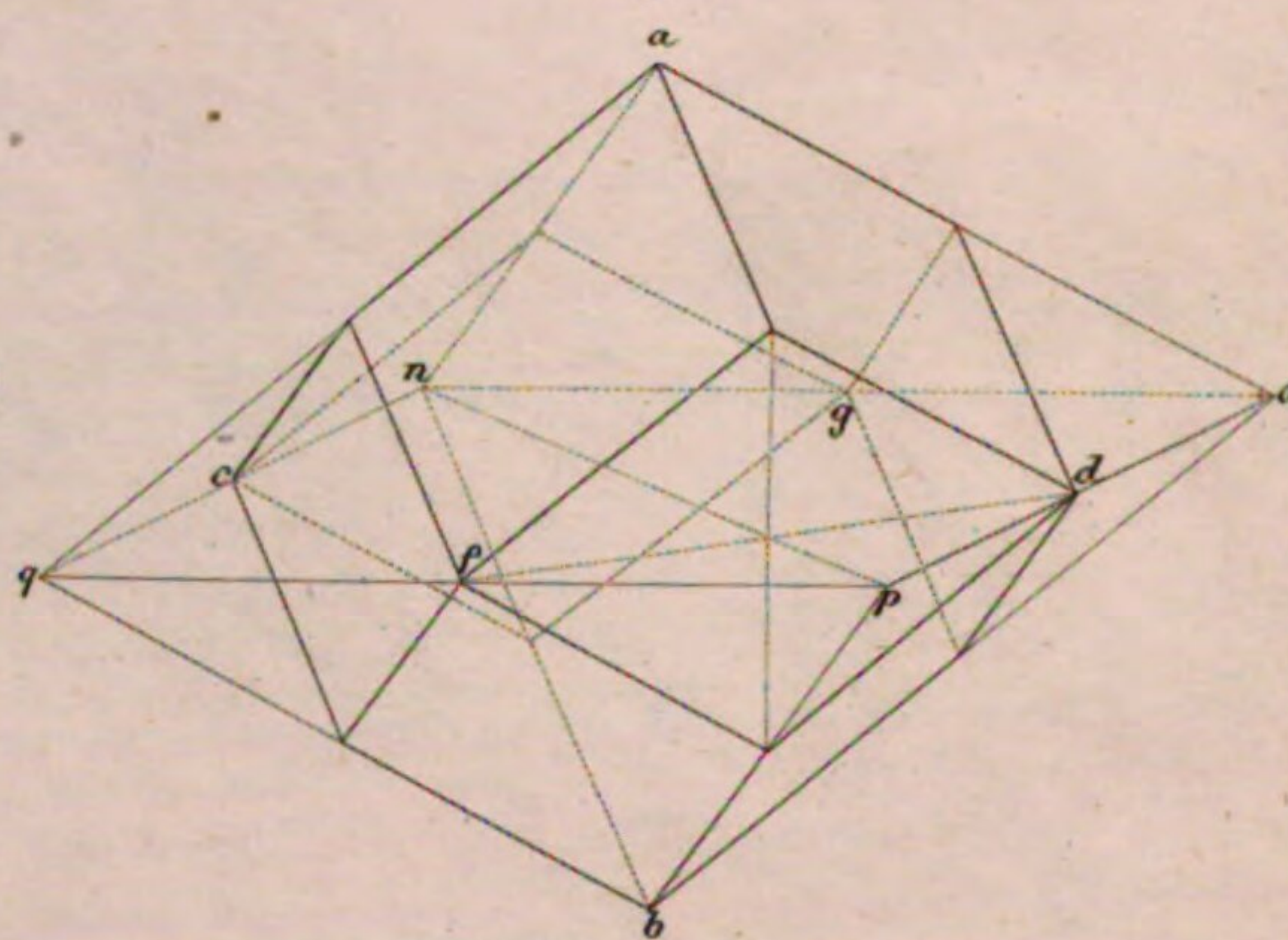


Fig. 11



Fig. 10



Fig. 12



Fig. 13



Fig. 74.

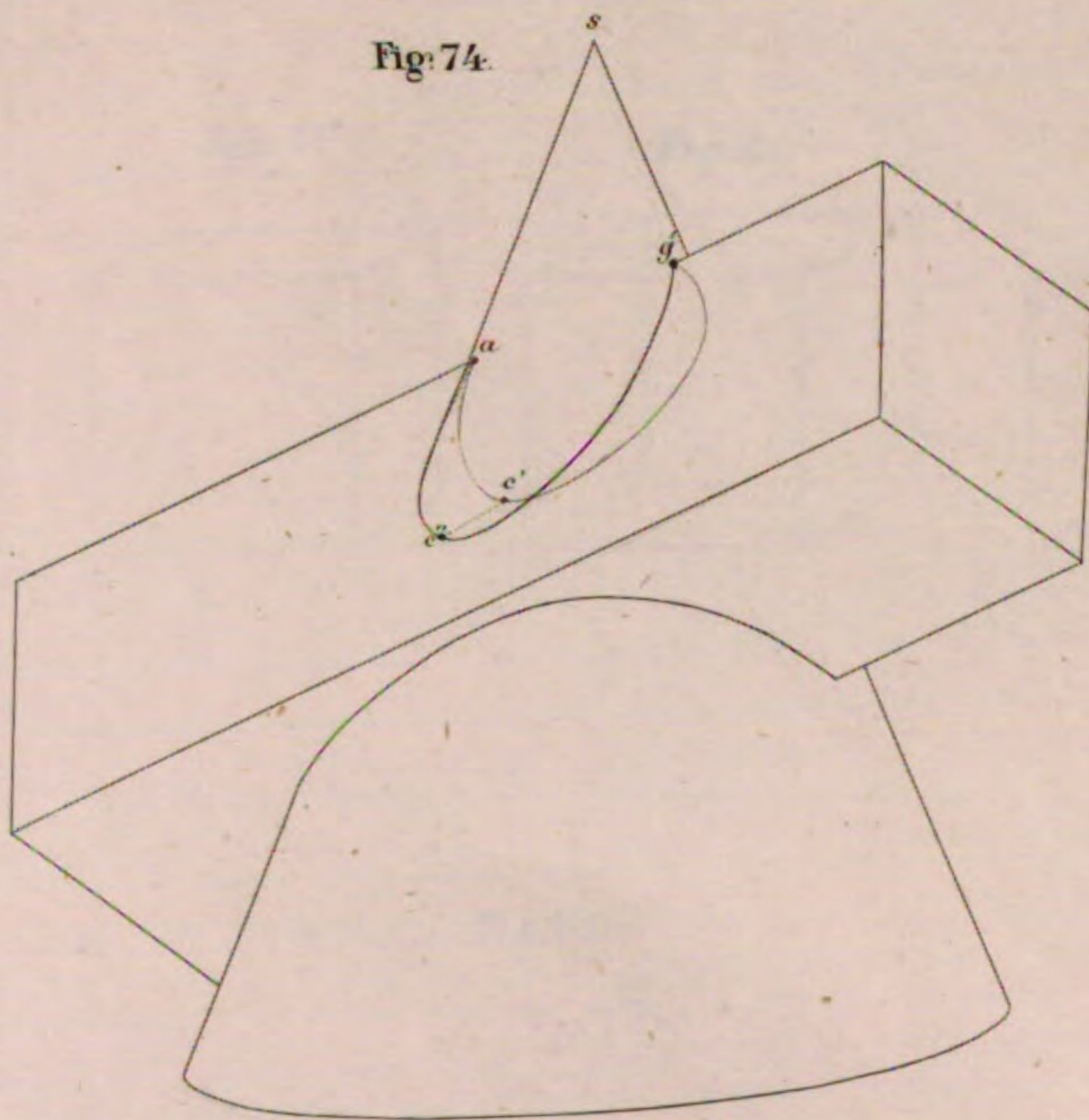
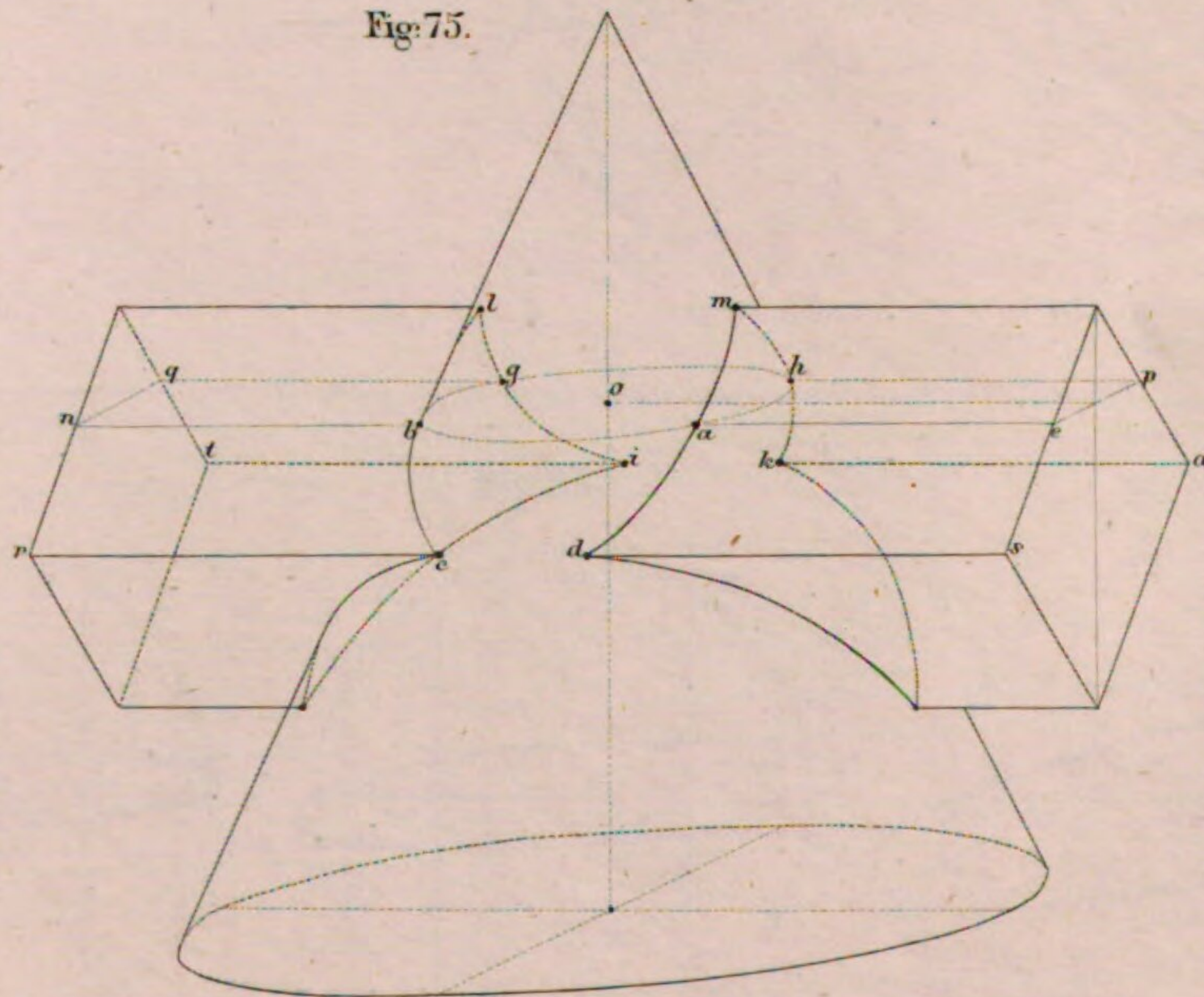
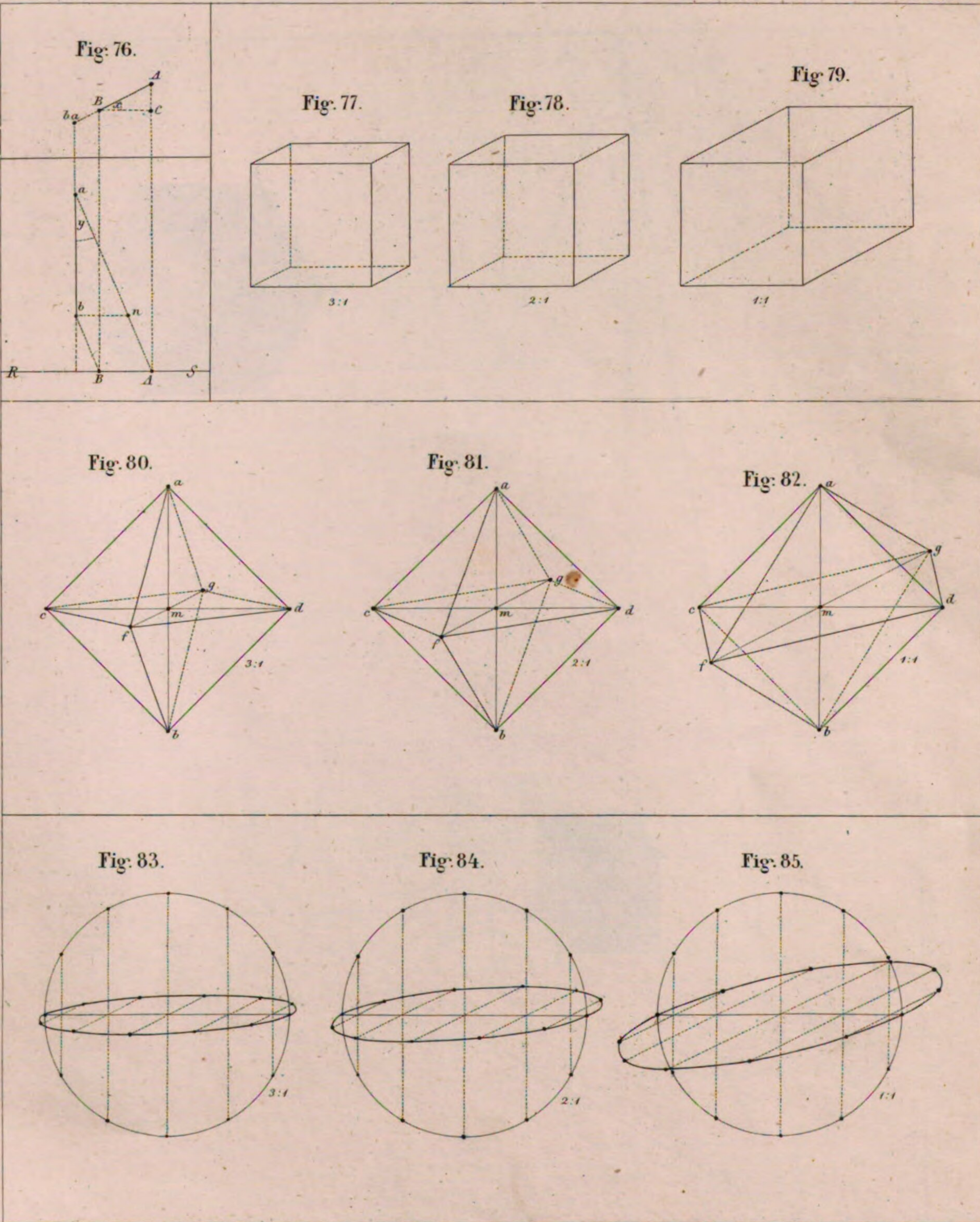


Fig. 75.





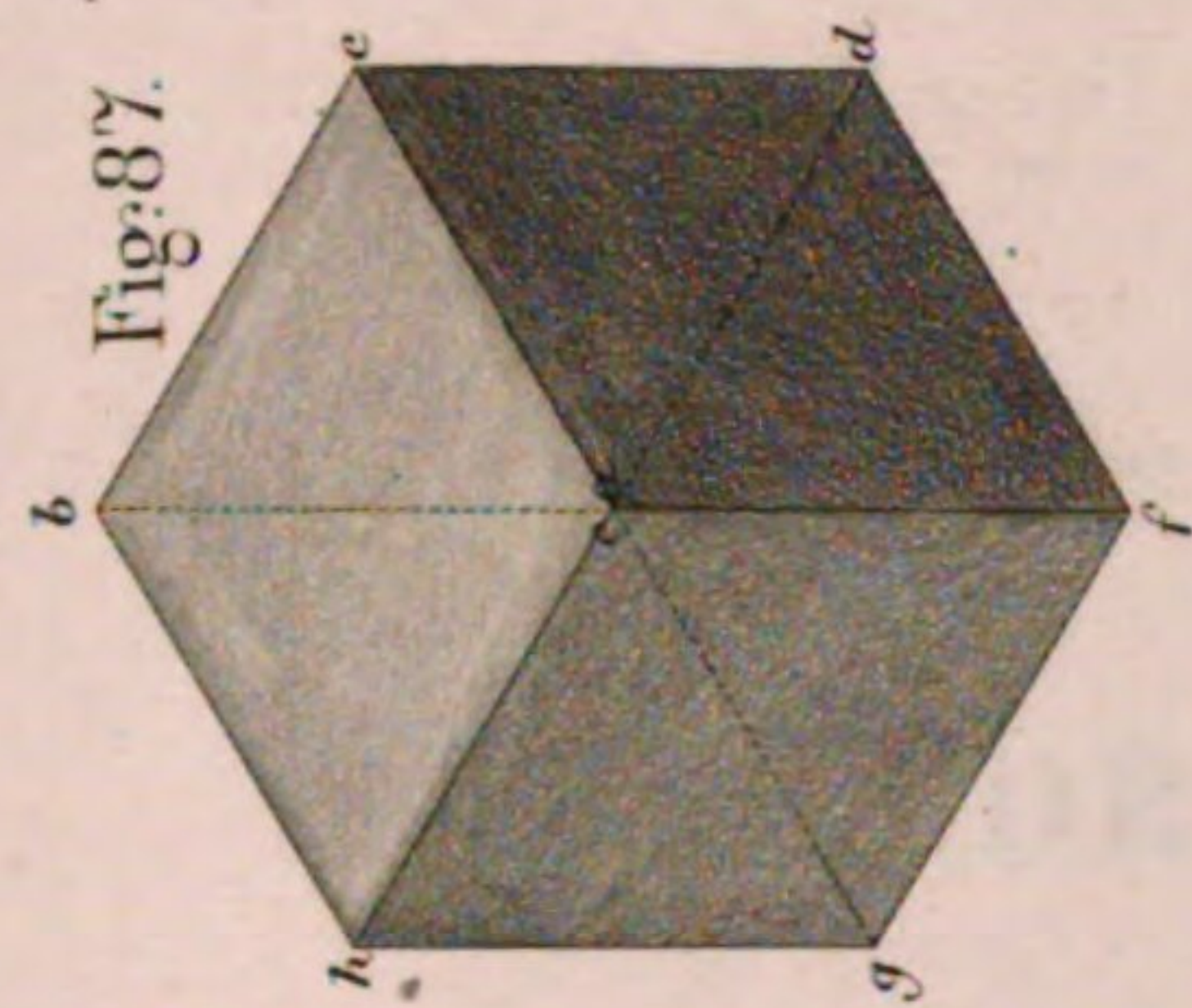
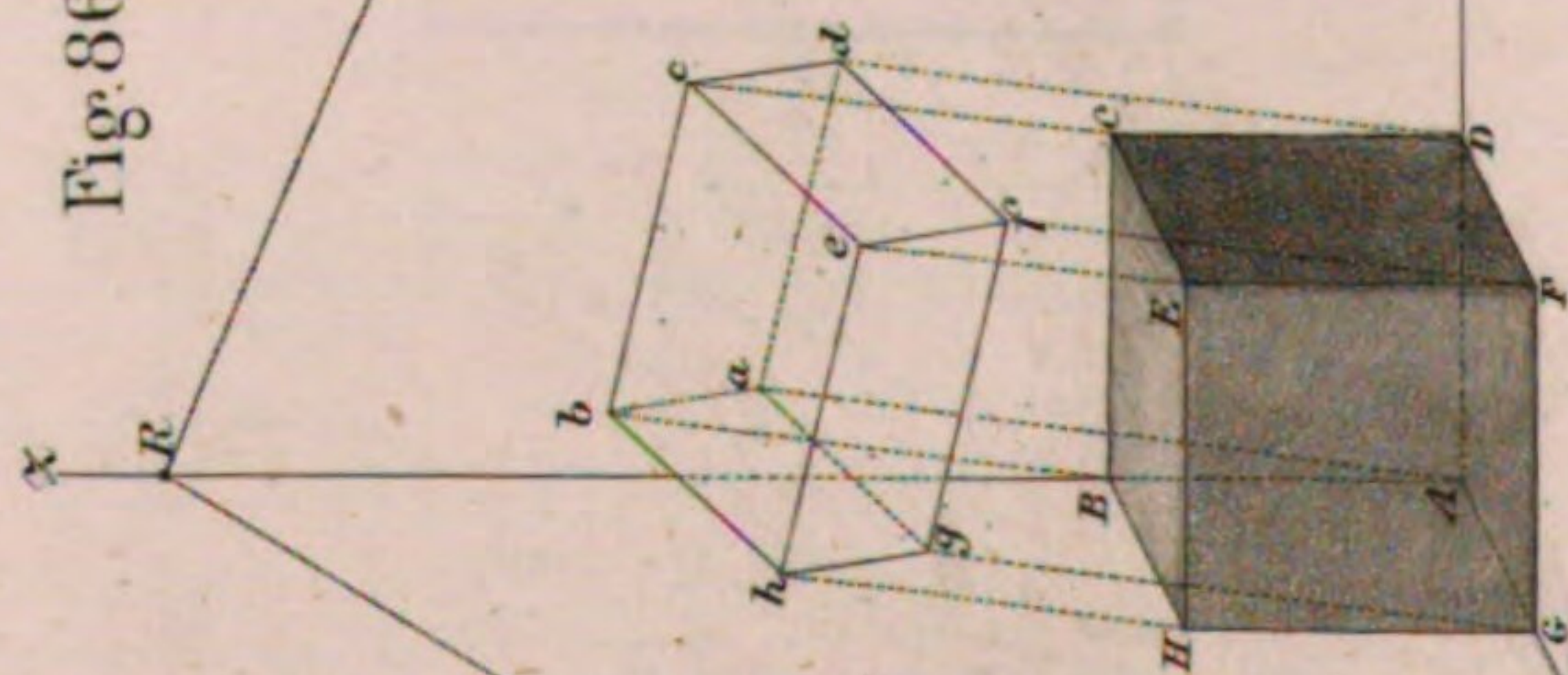


Fig. 86.



DRITTES BUCH.

KONISCHE PROJECTION

ODER

MALERISCHE PERSPECTIVE.

DRITTER THEIL

KONIGLICHES MUSEUM

MALERISCHE PERSPEKTIVE

Fig. 1.

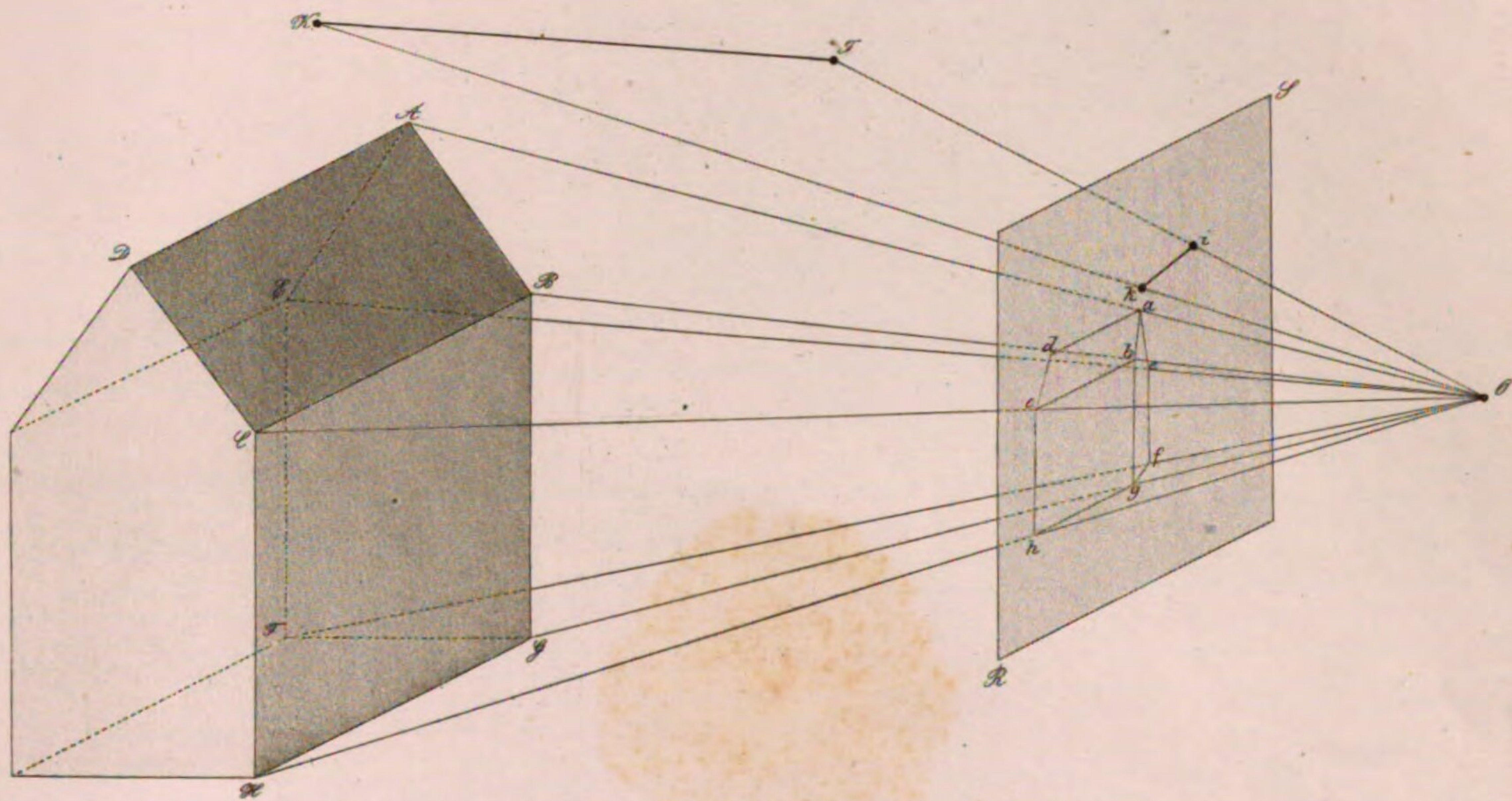
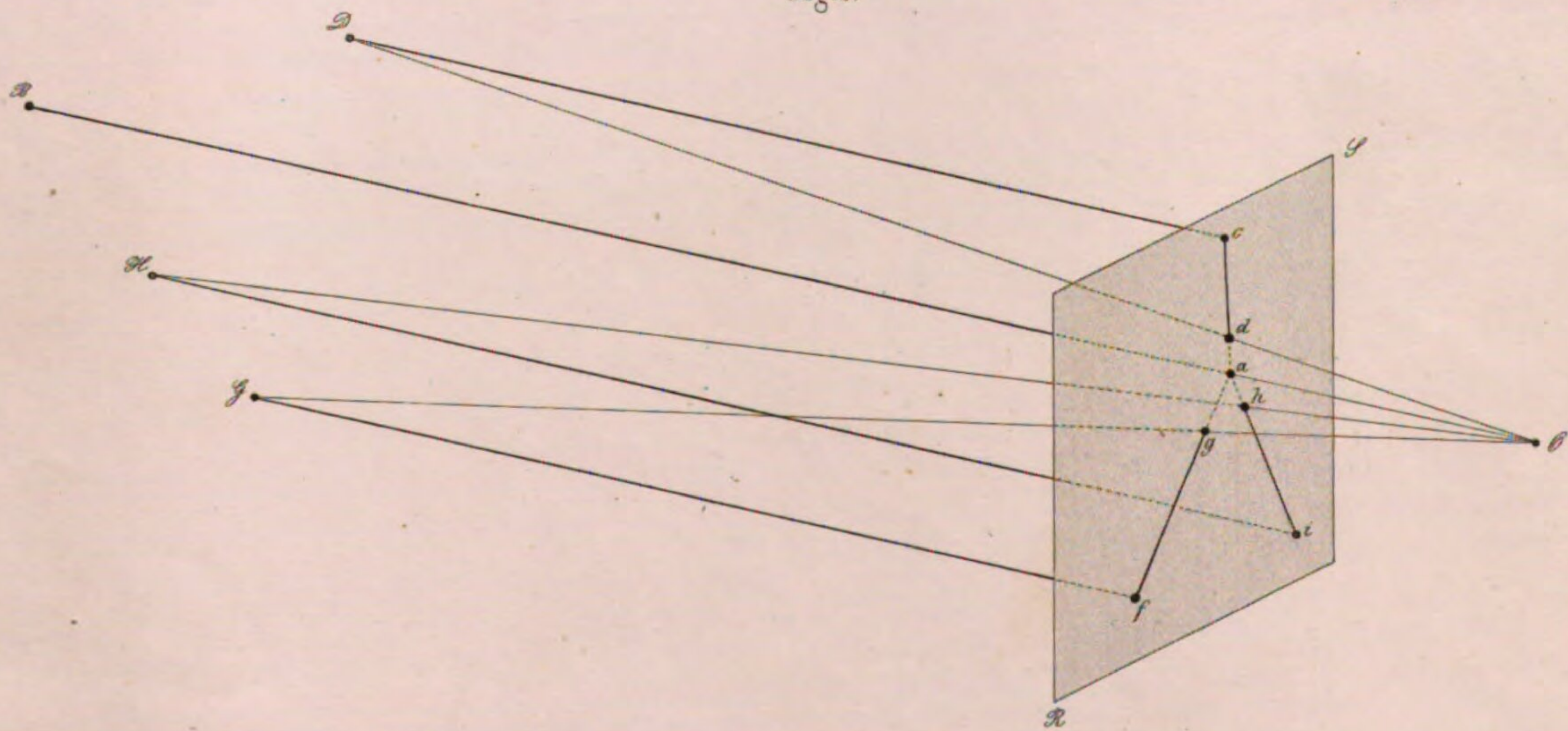
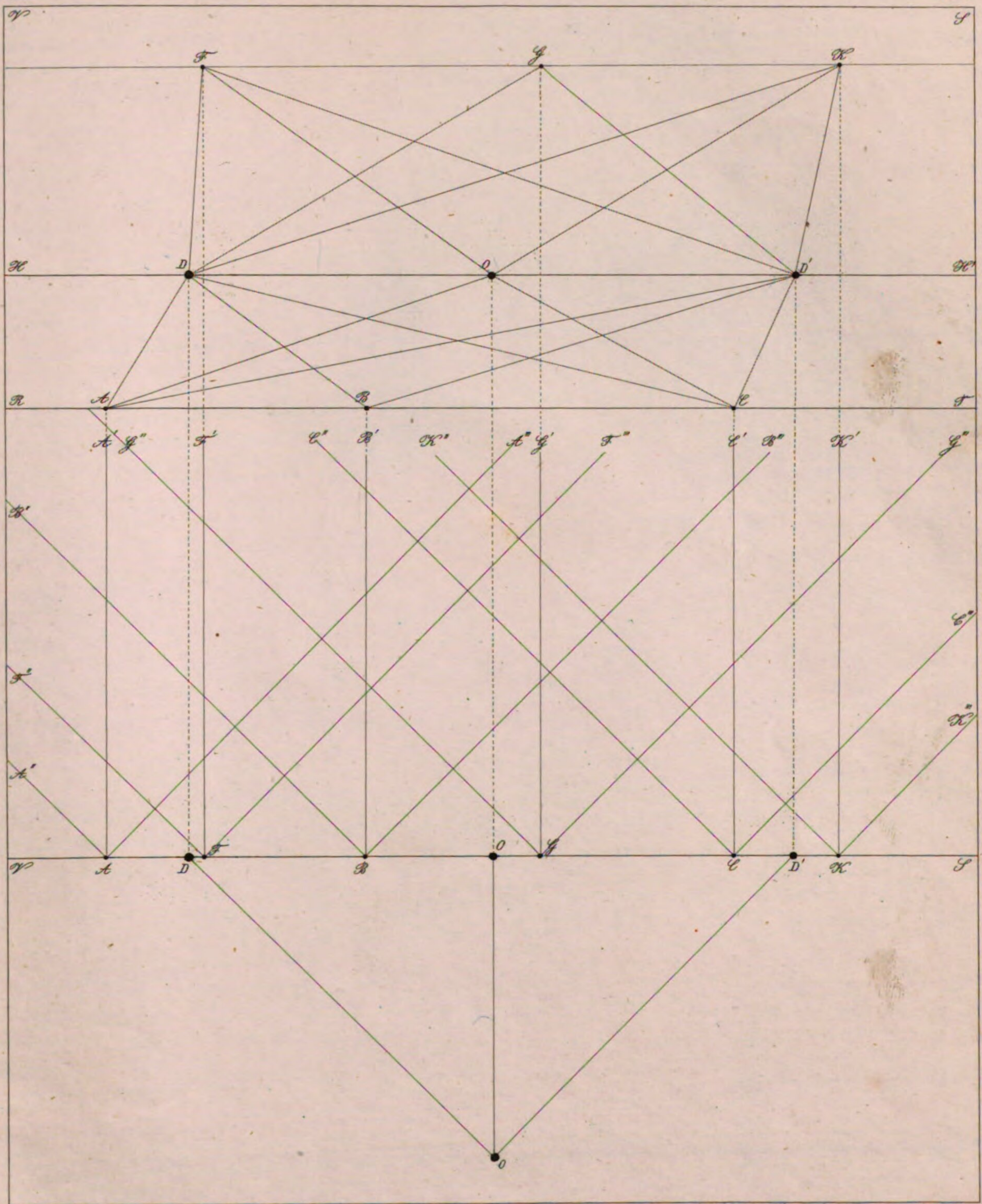


Fig. 2.





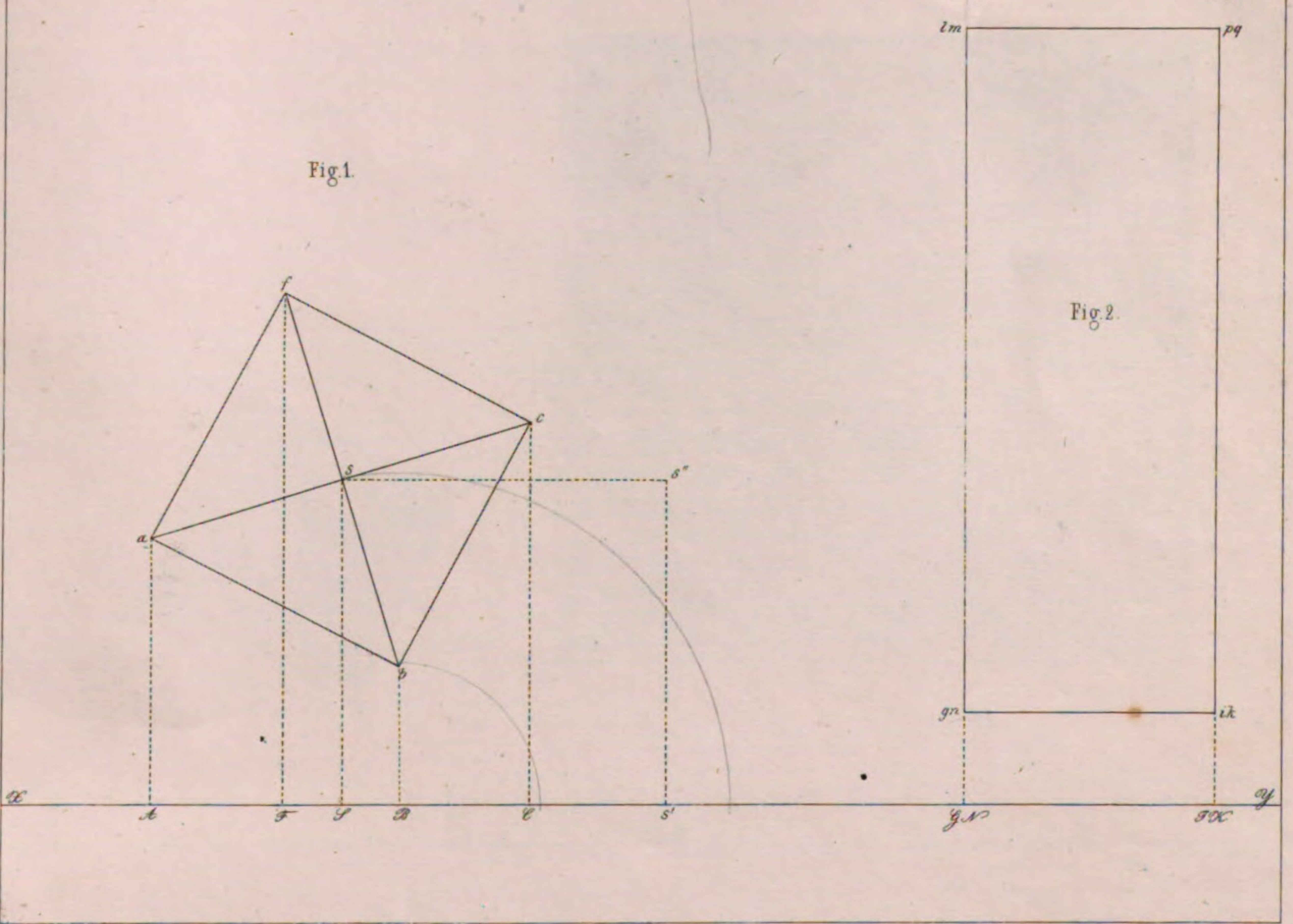
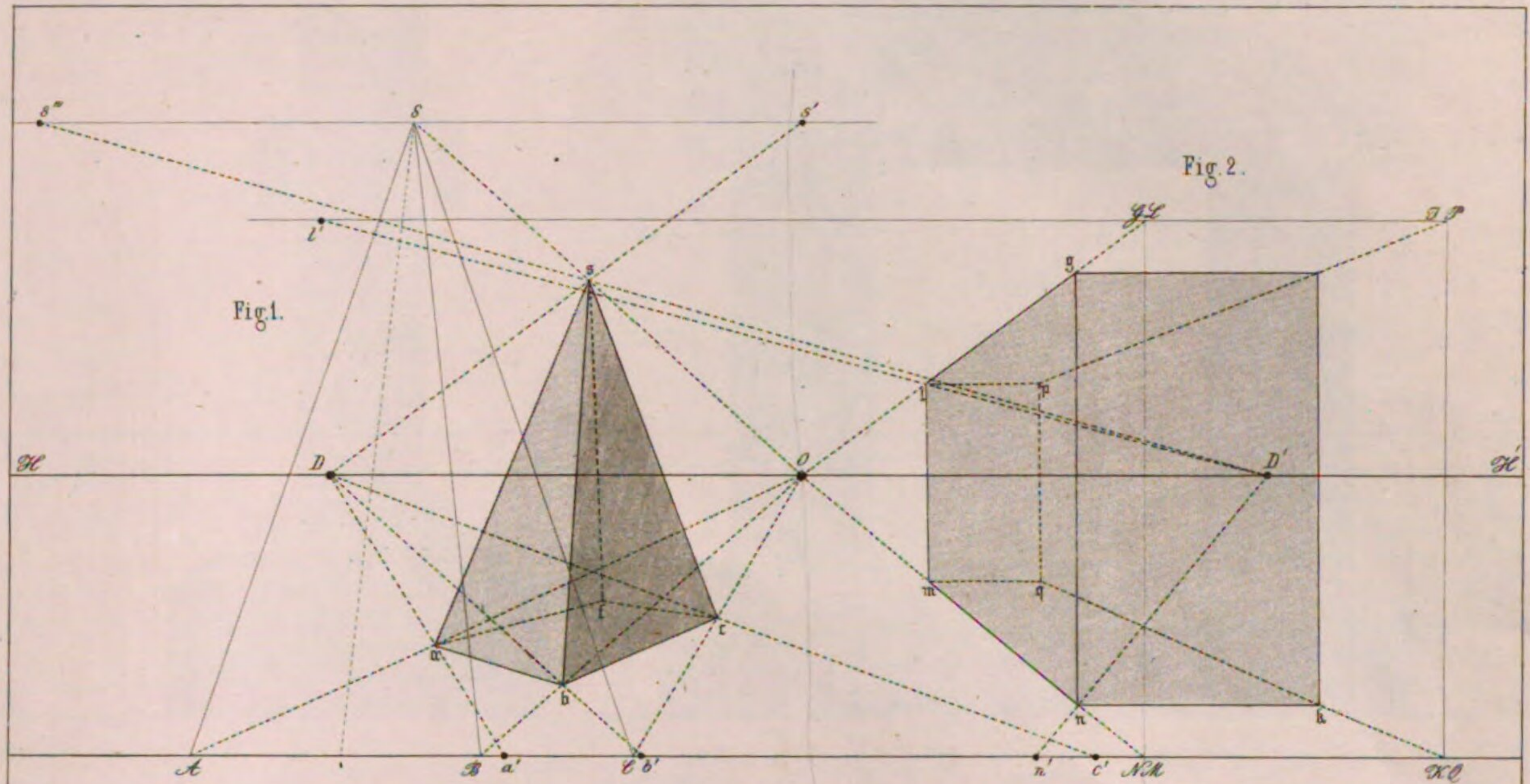


Fig. 1.

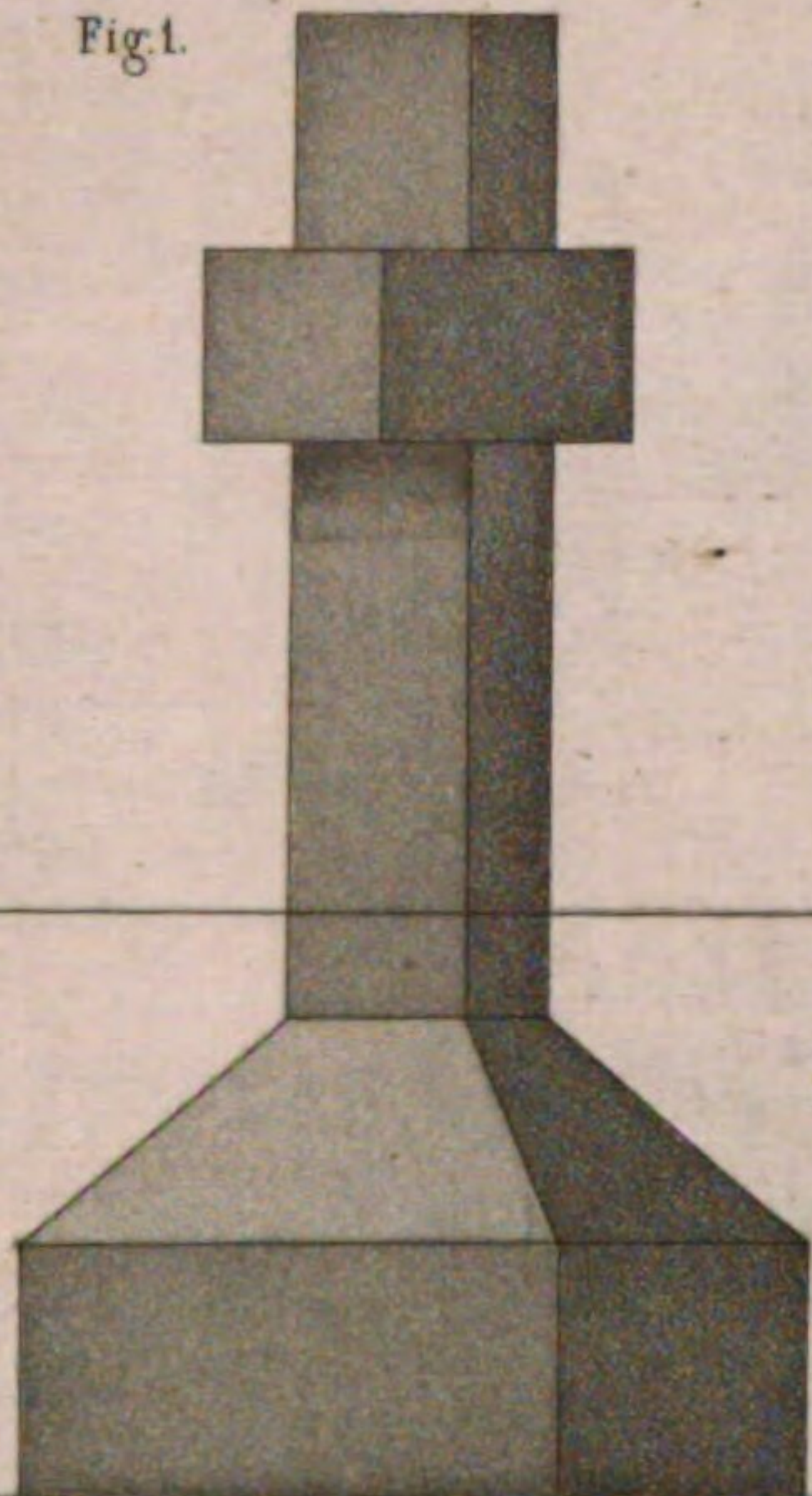


Fig. 2.

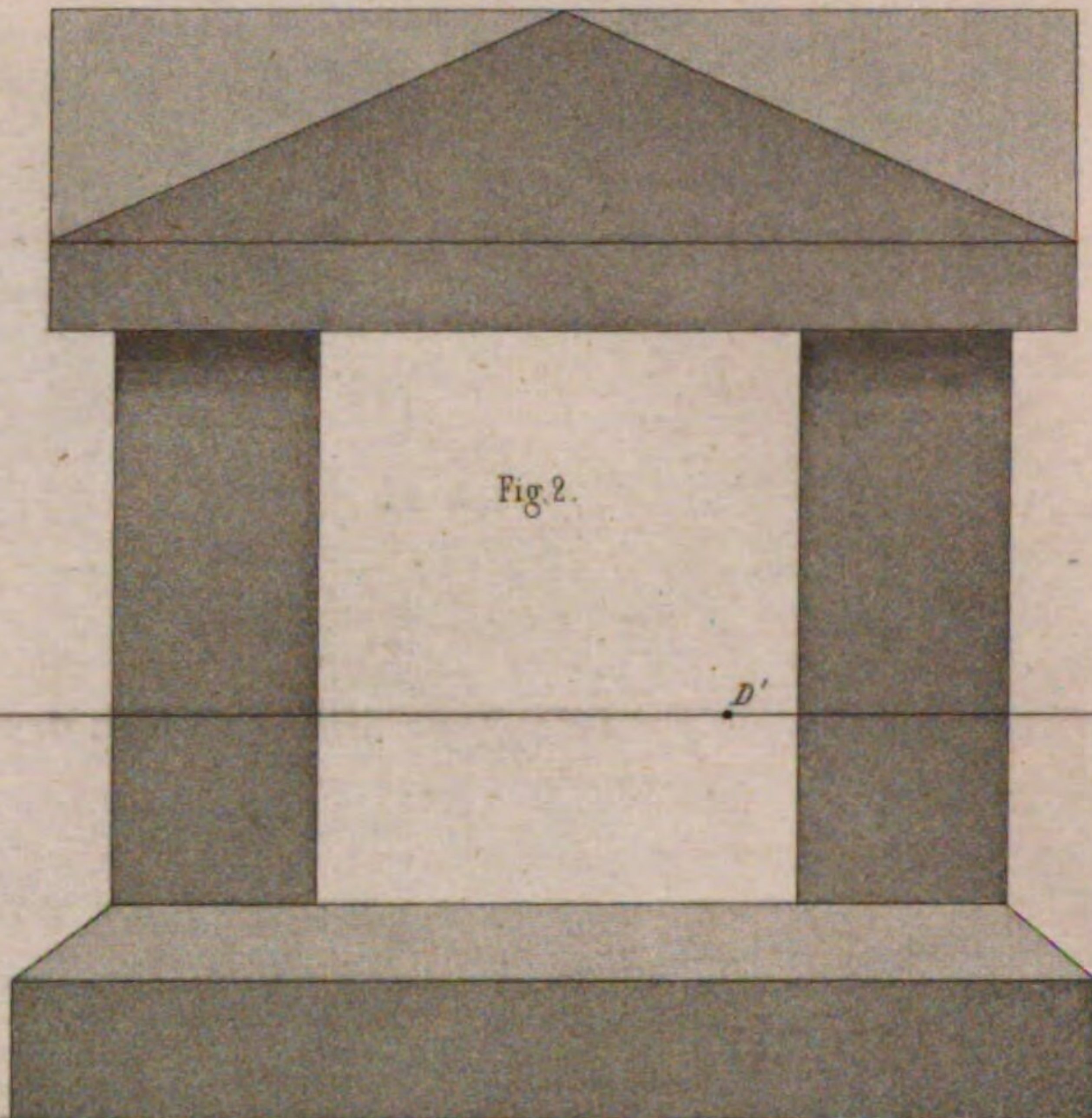


Fig. 2.

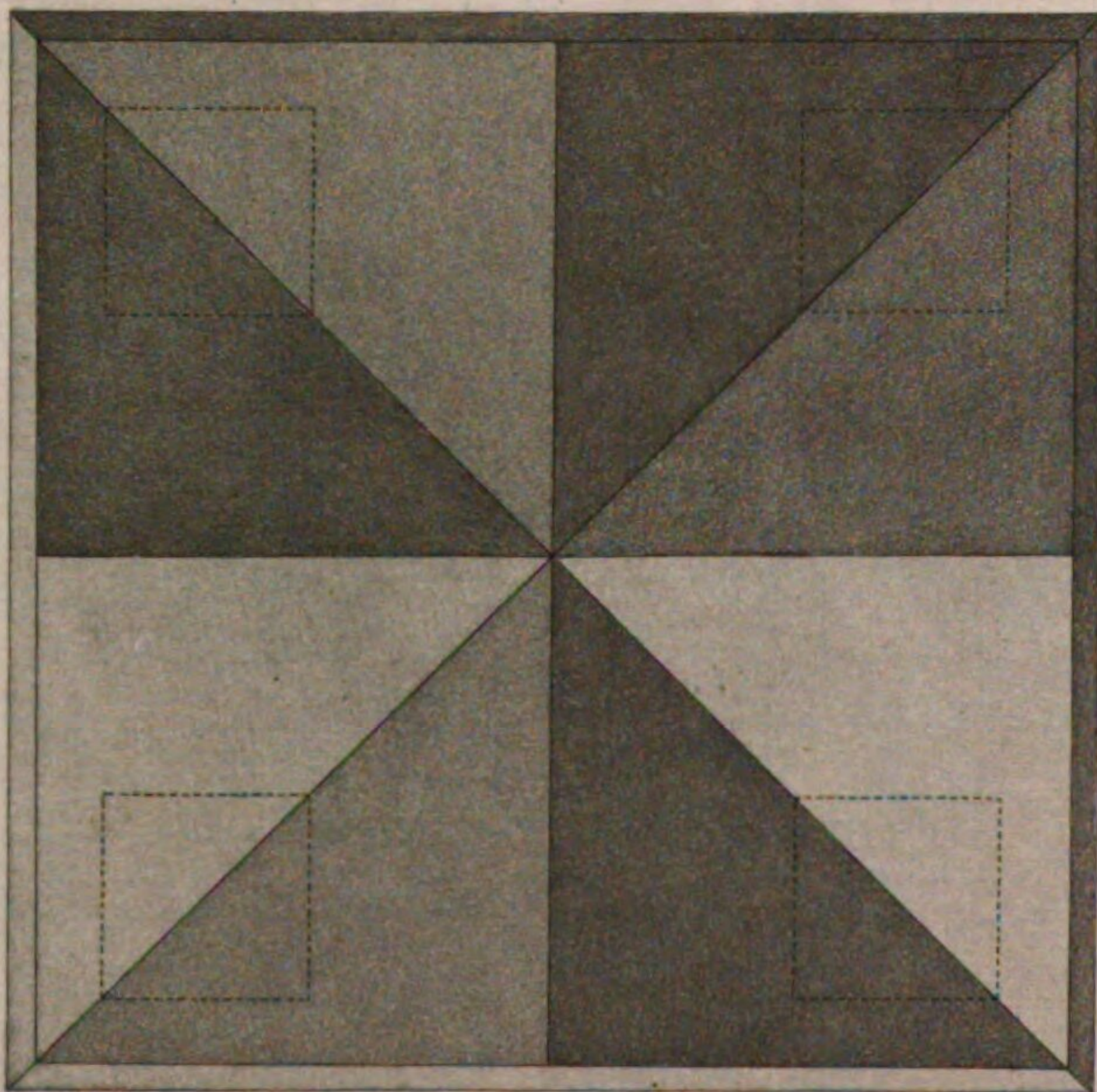
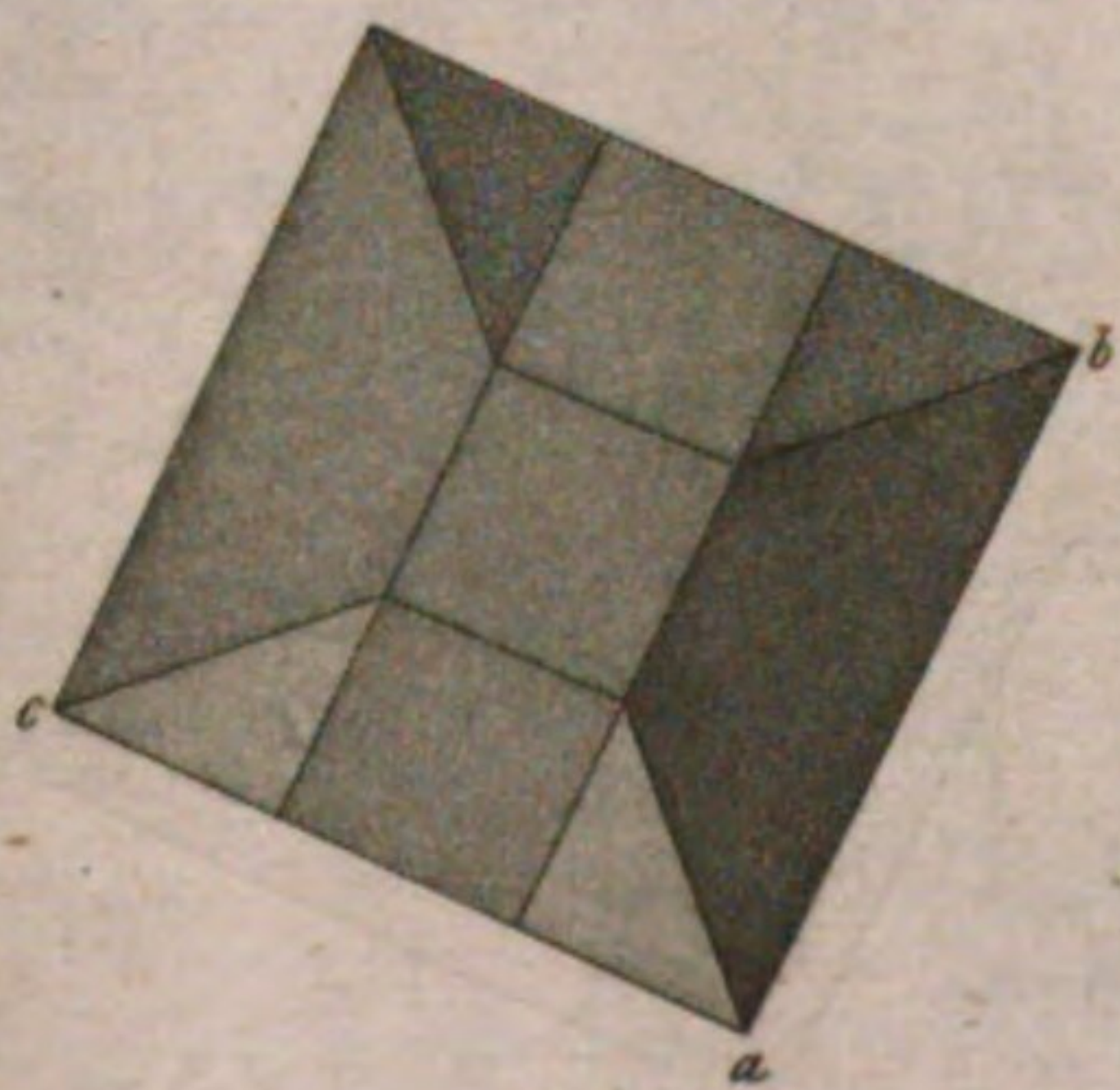
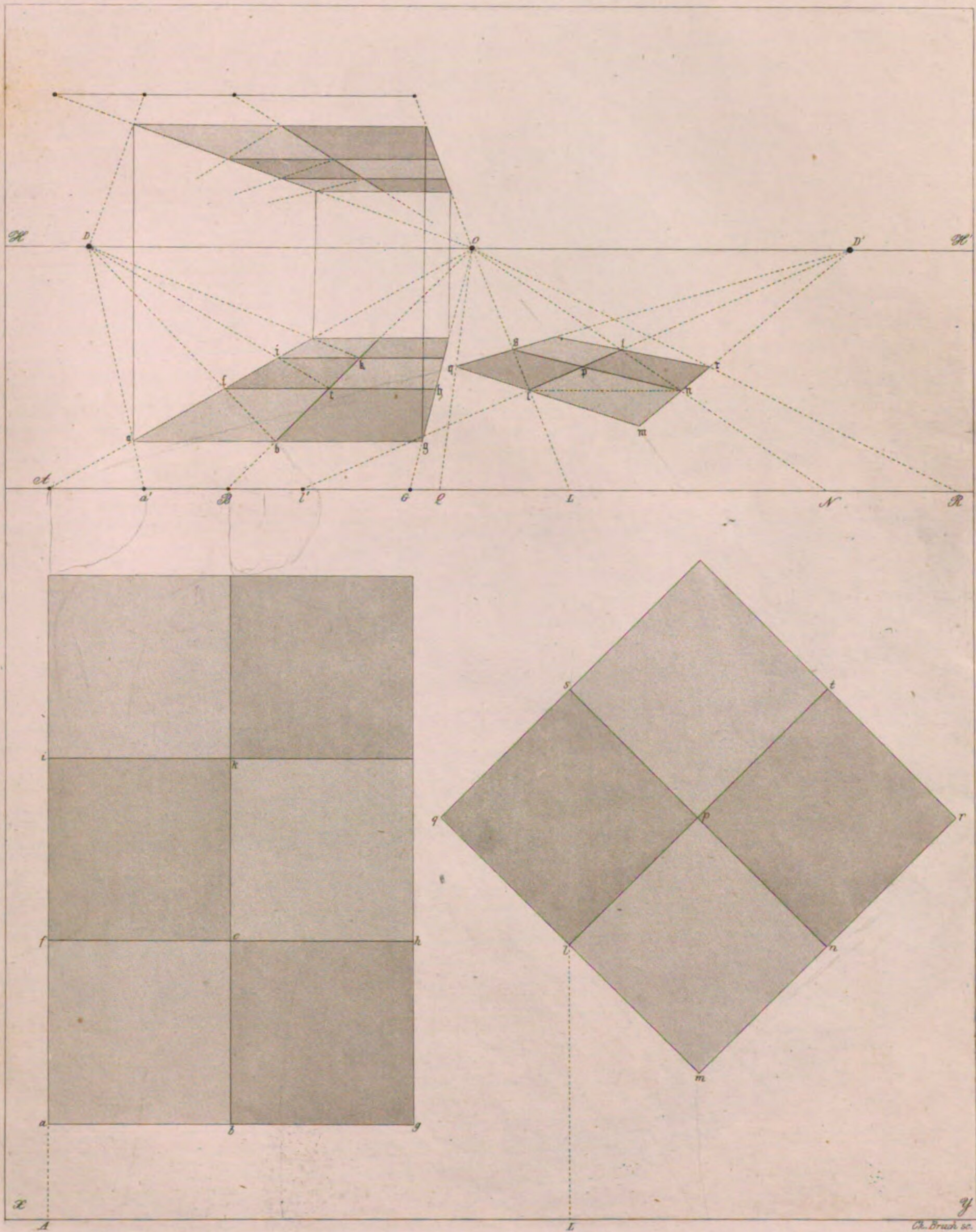
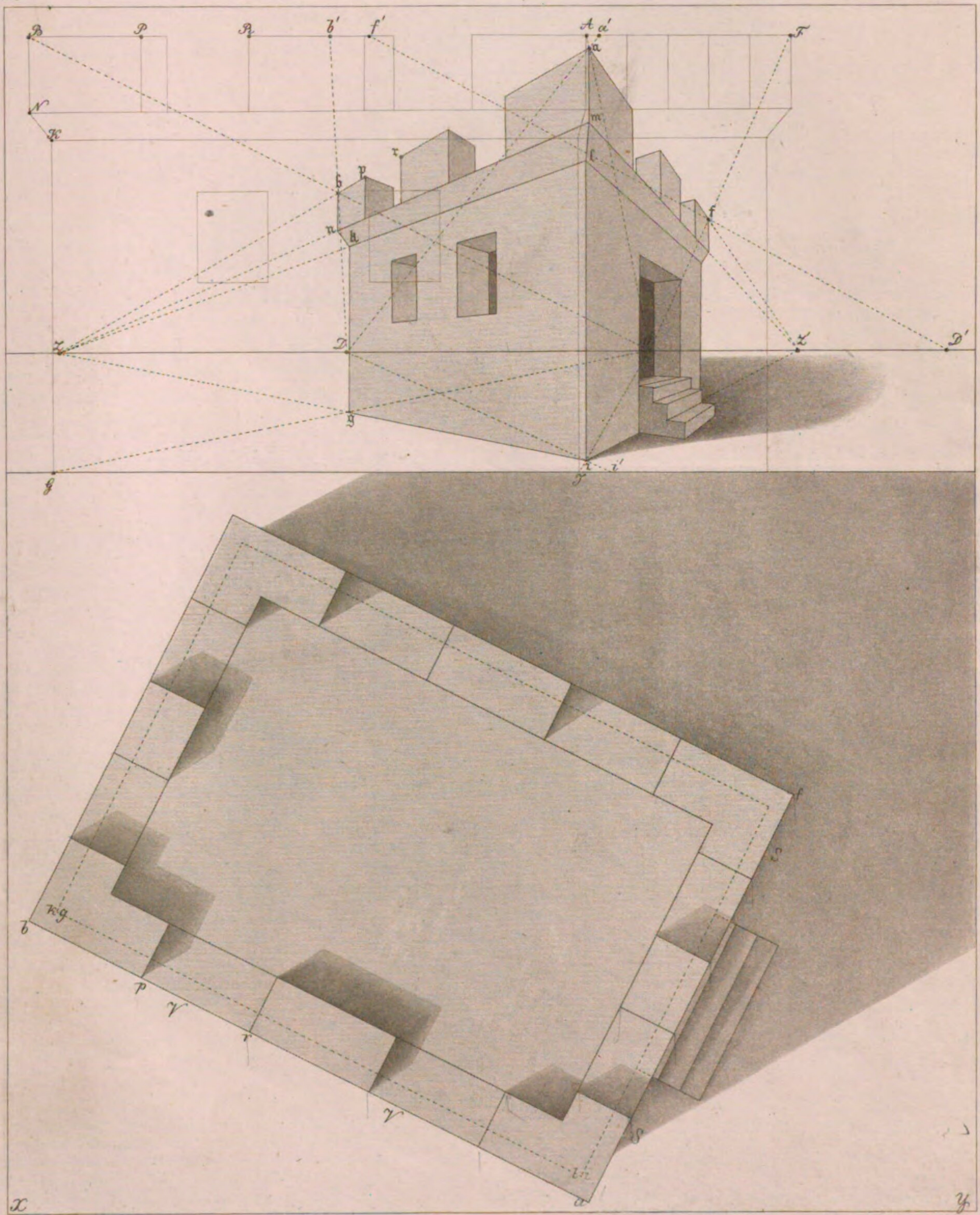
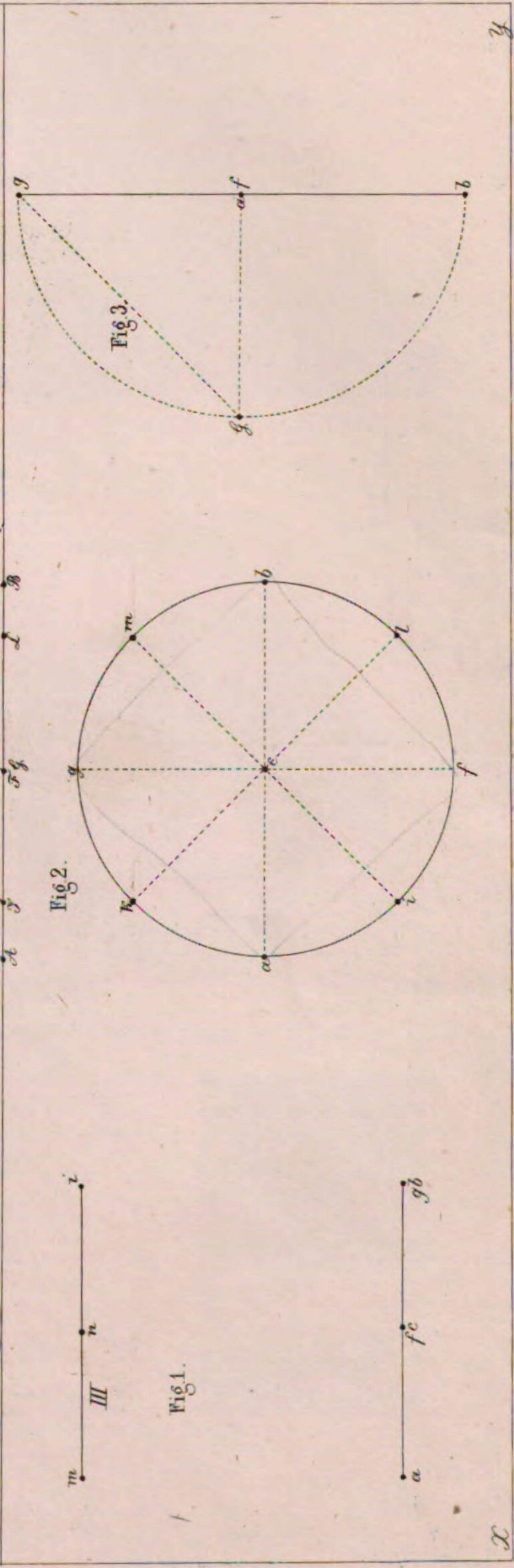
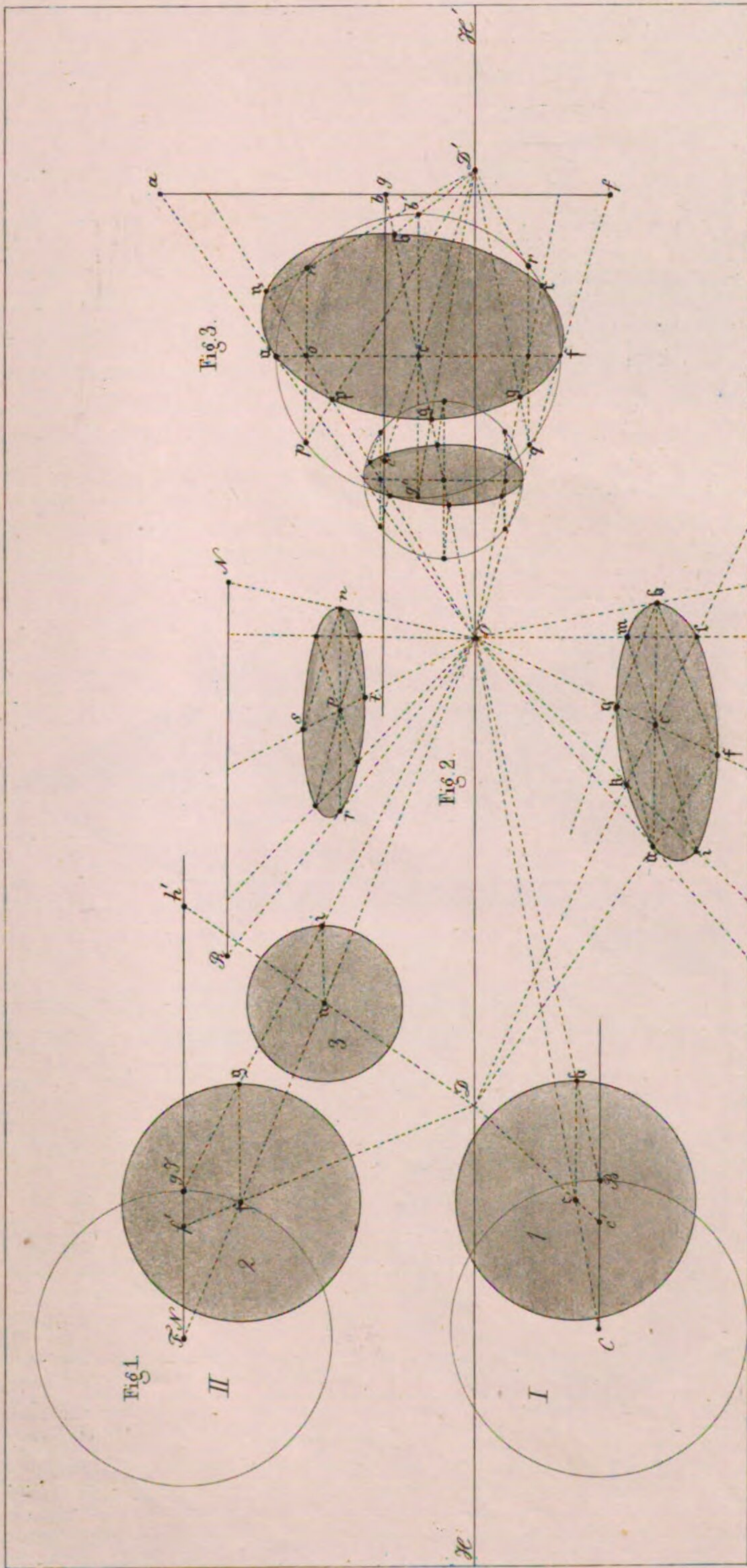


Fig. 1.









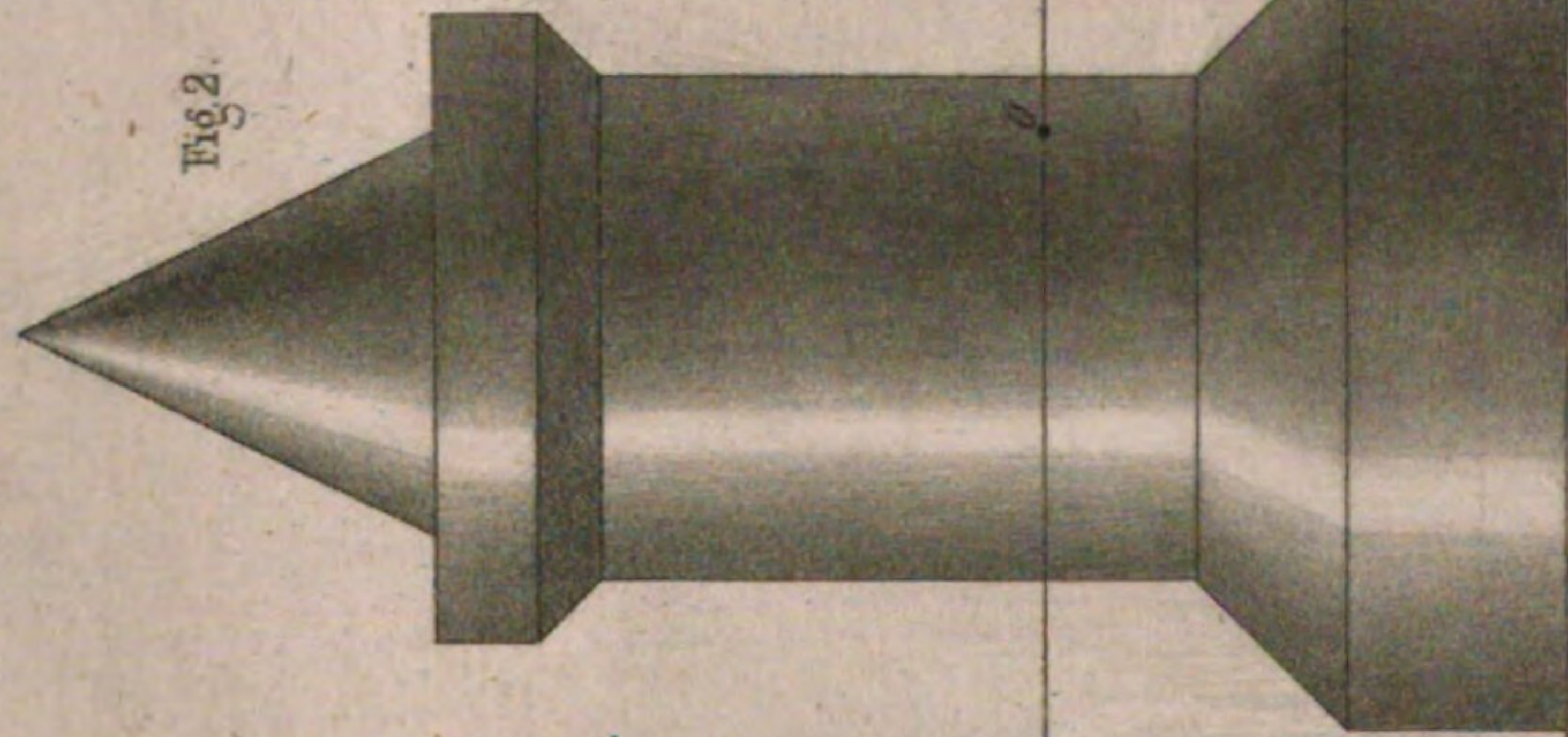


Fig. 2.

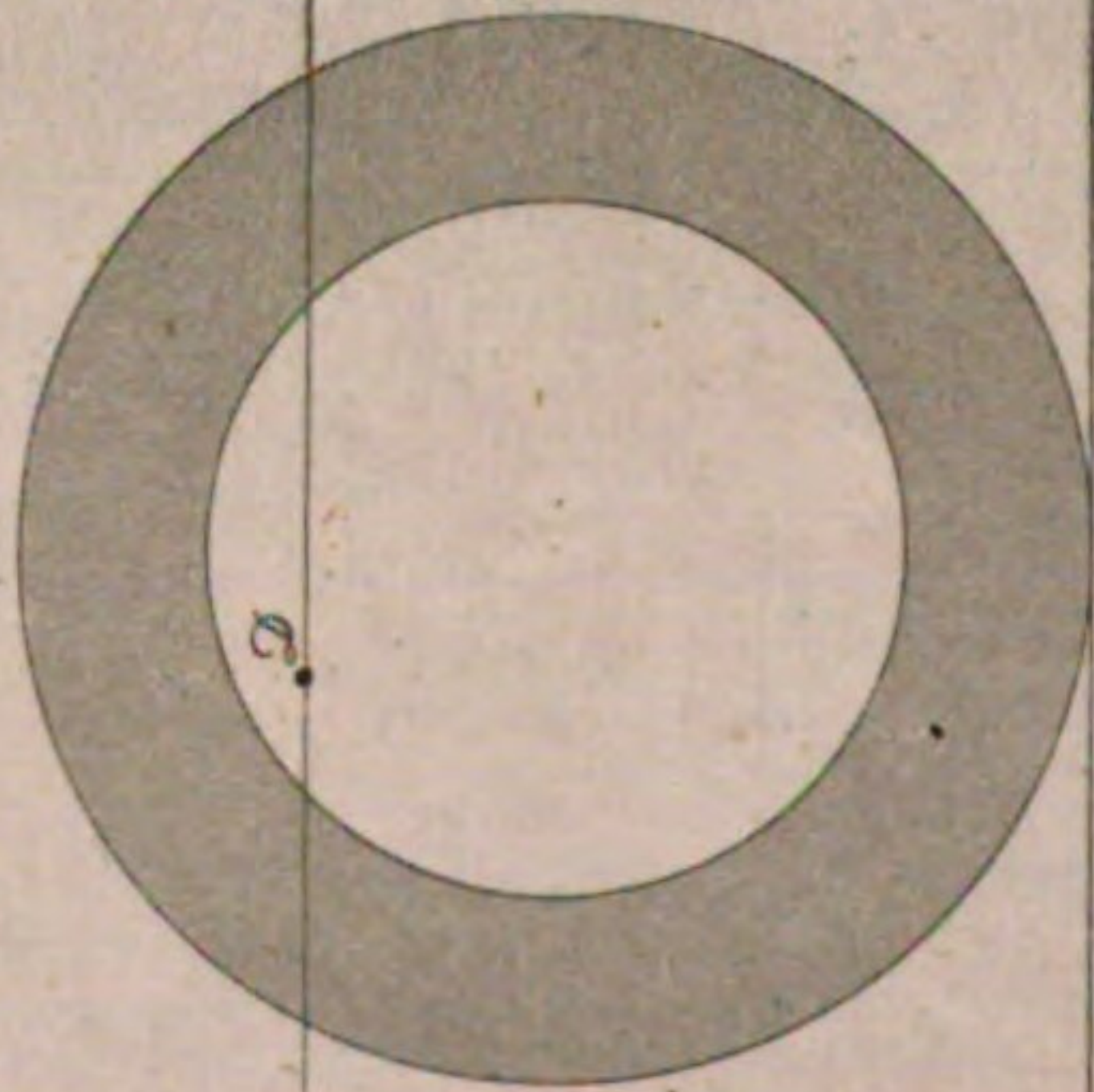
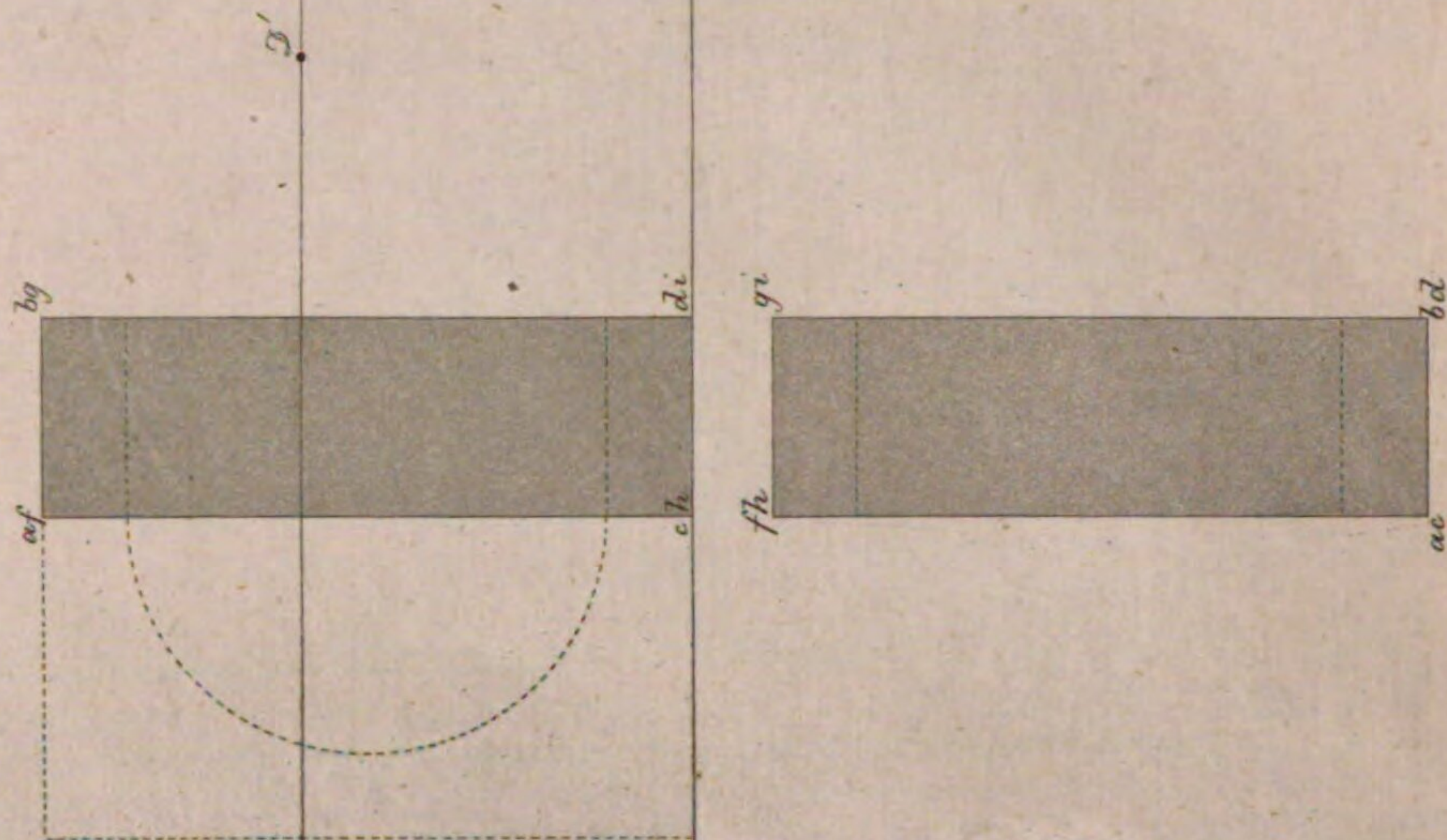
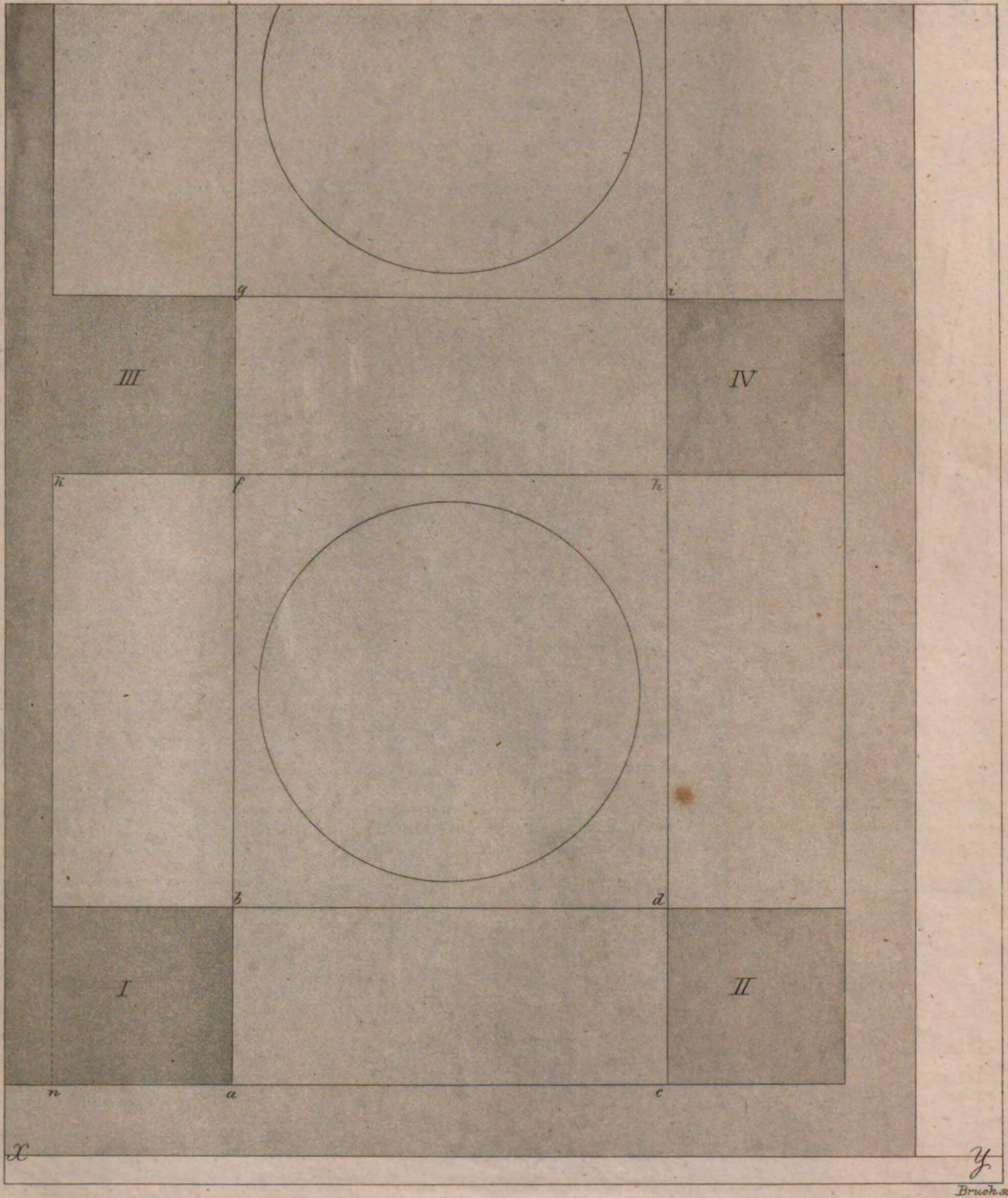


Fig. 1.

Fig. 3.







VIERTES BUCH.

SCHATTENLEHRE.

ALBERT RICH

SCHATTEN RICH



Fig 1.

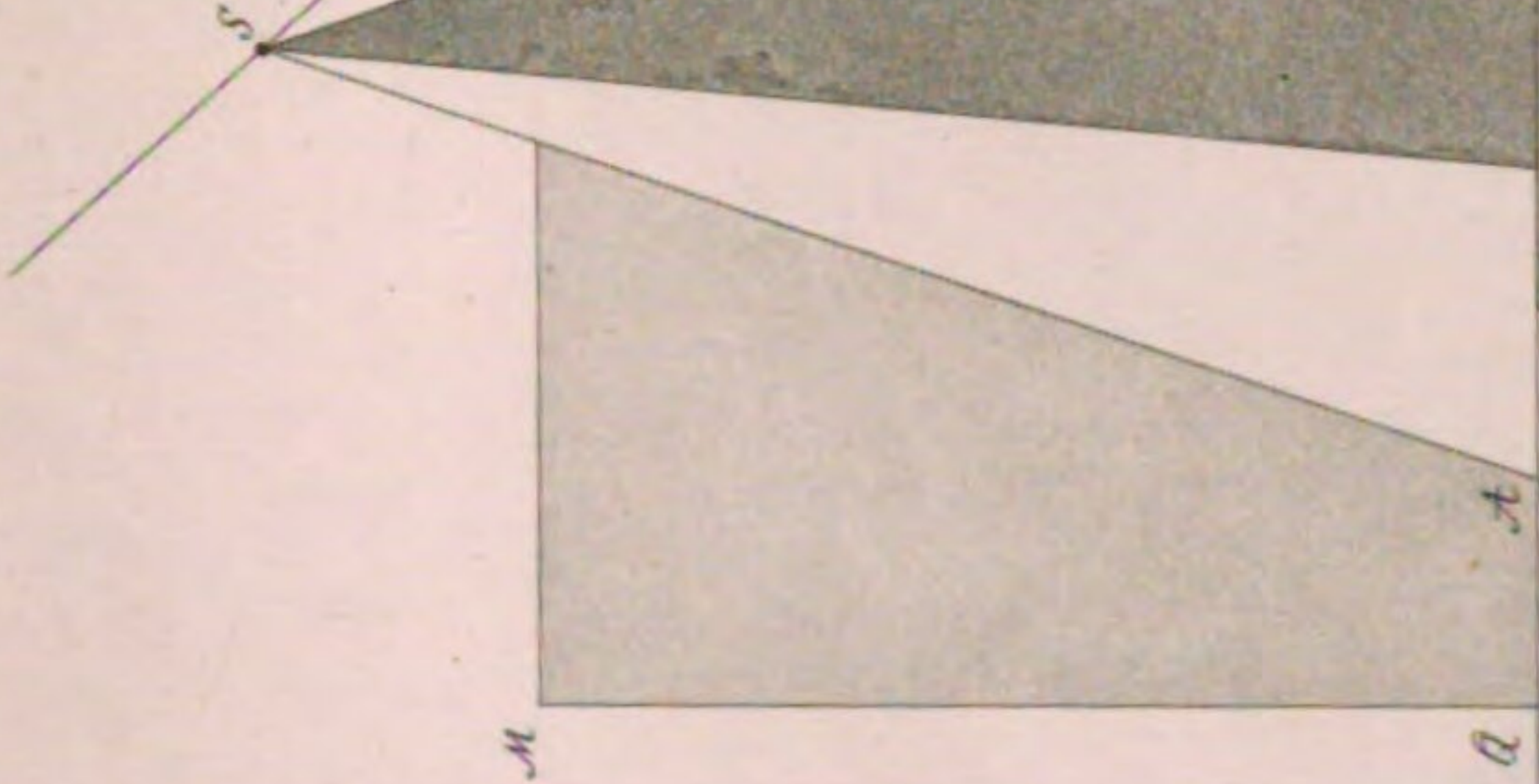


Fig 2.

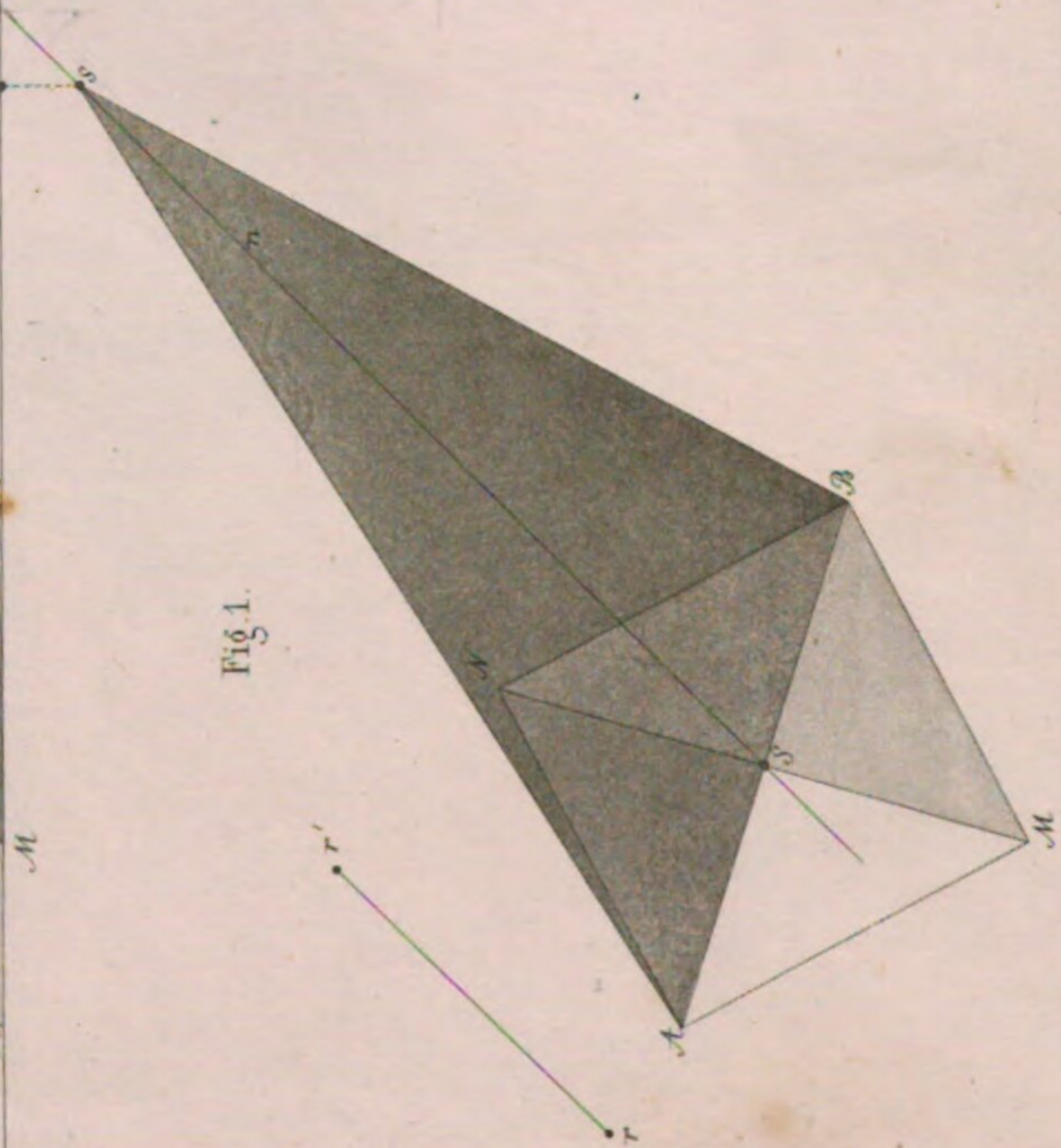


Fig 1.

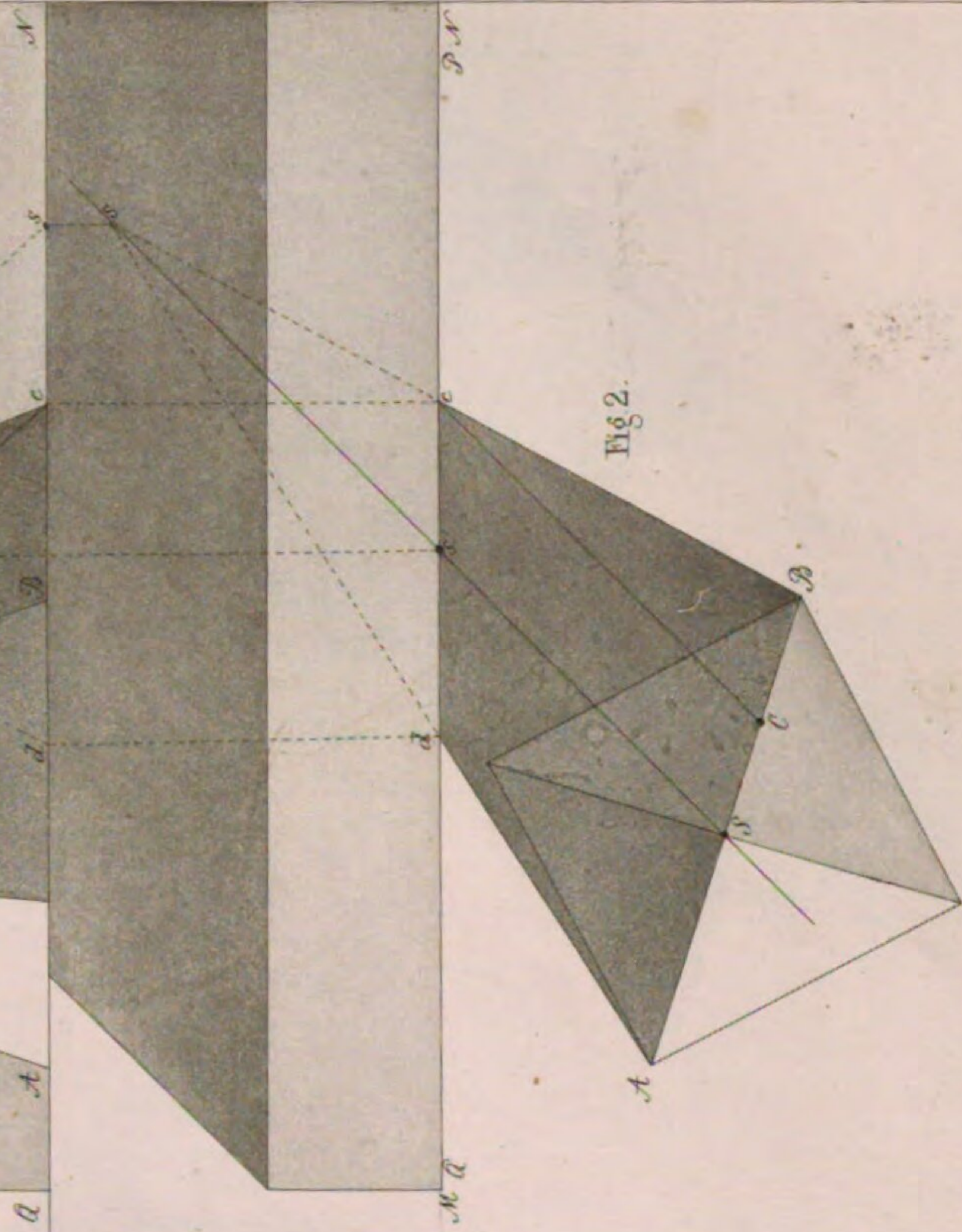
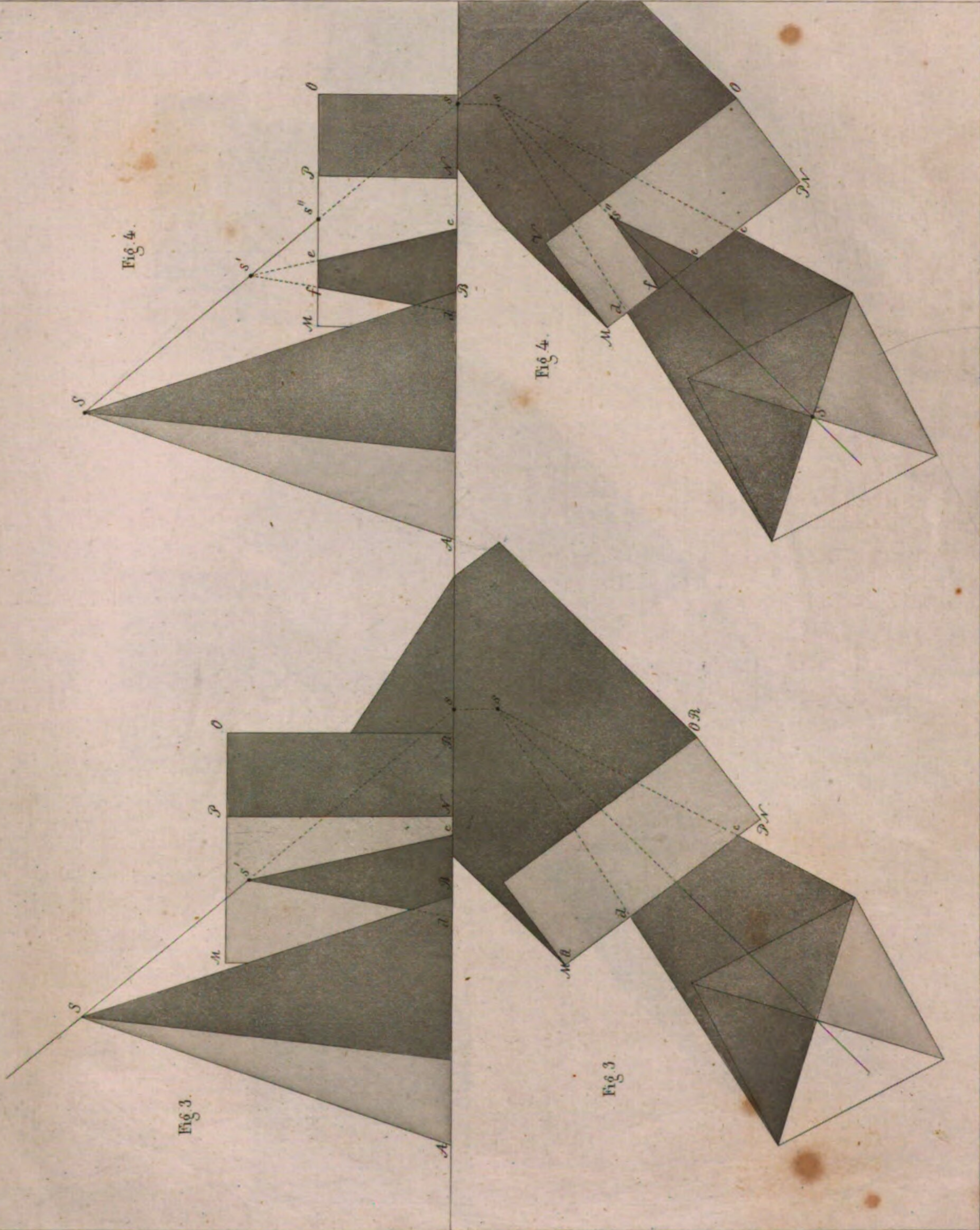
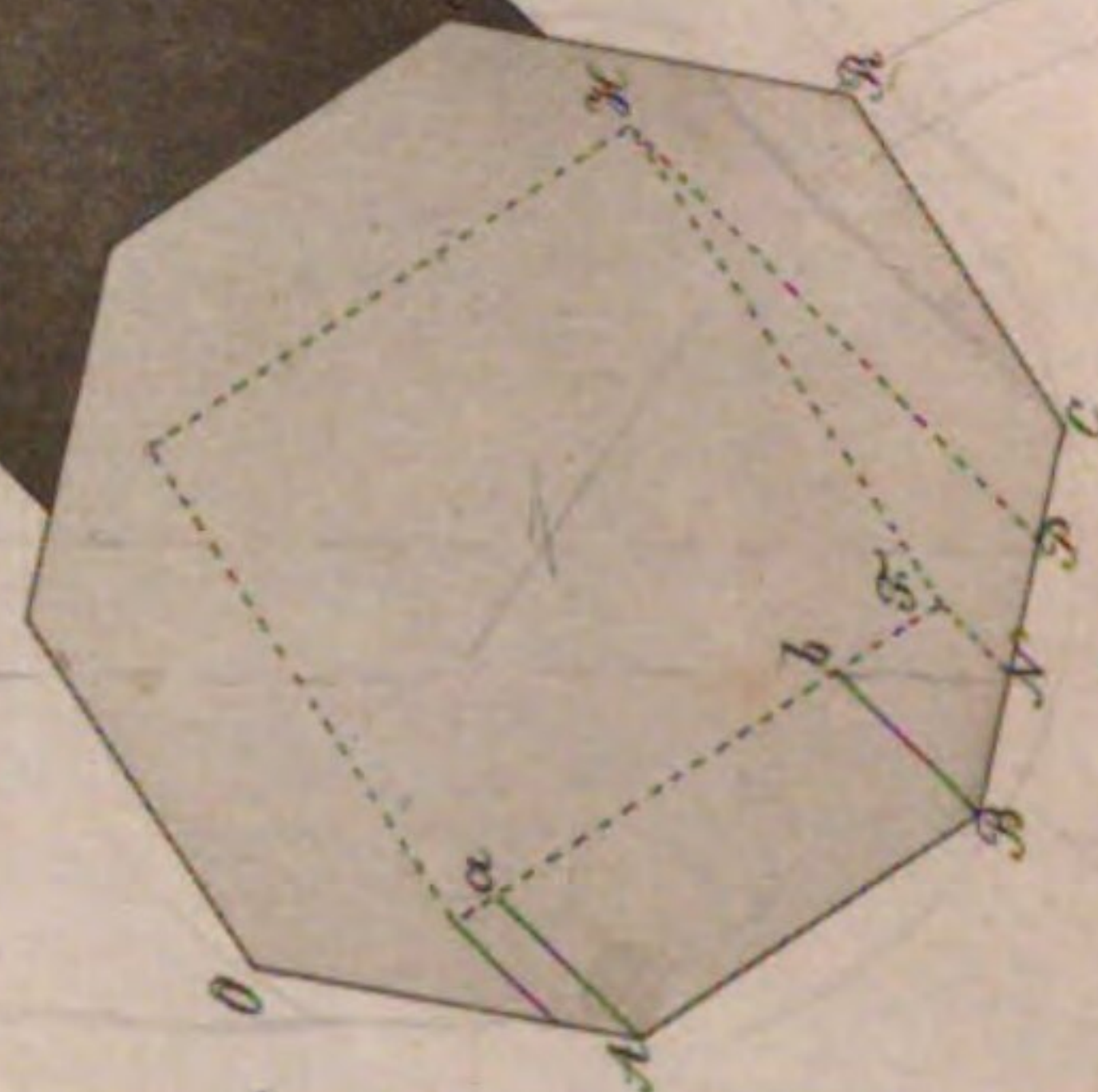
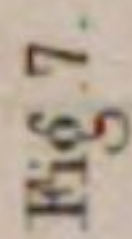
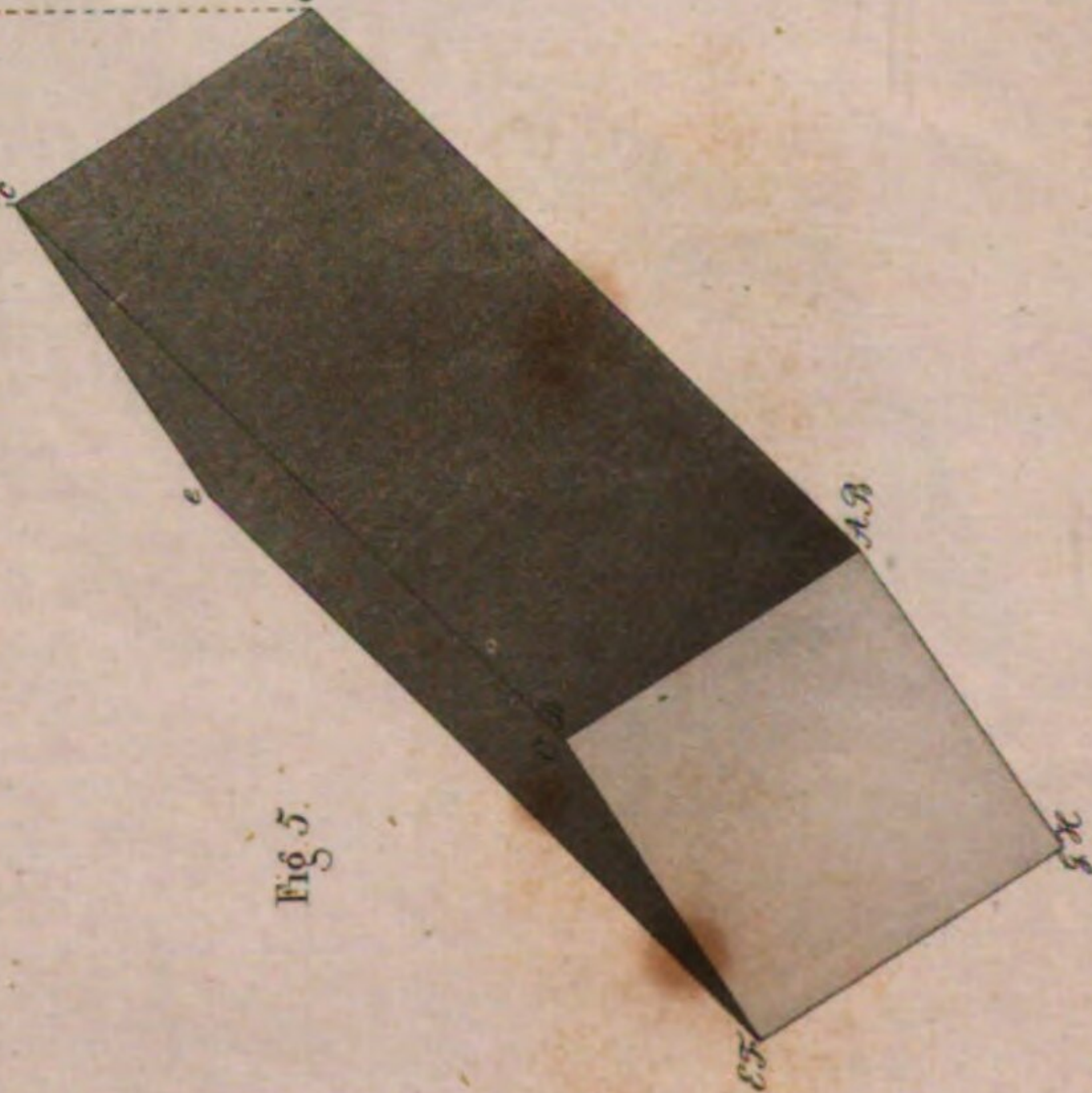
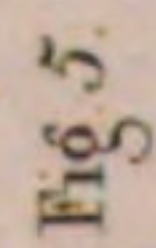
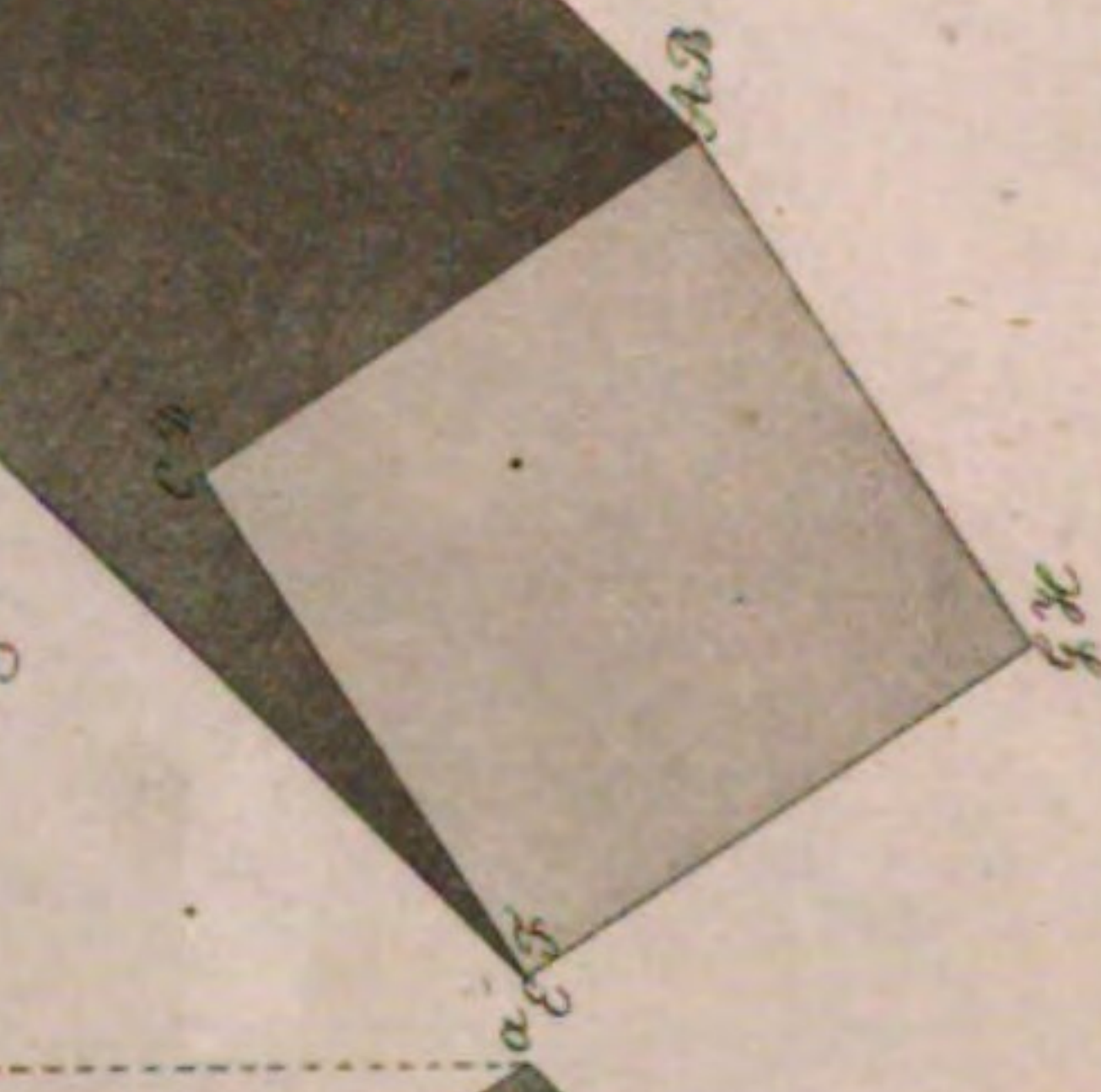
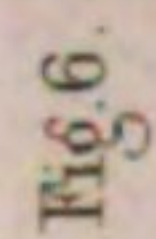
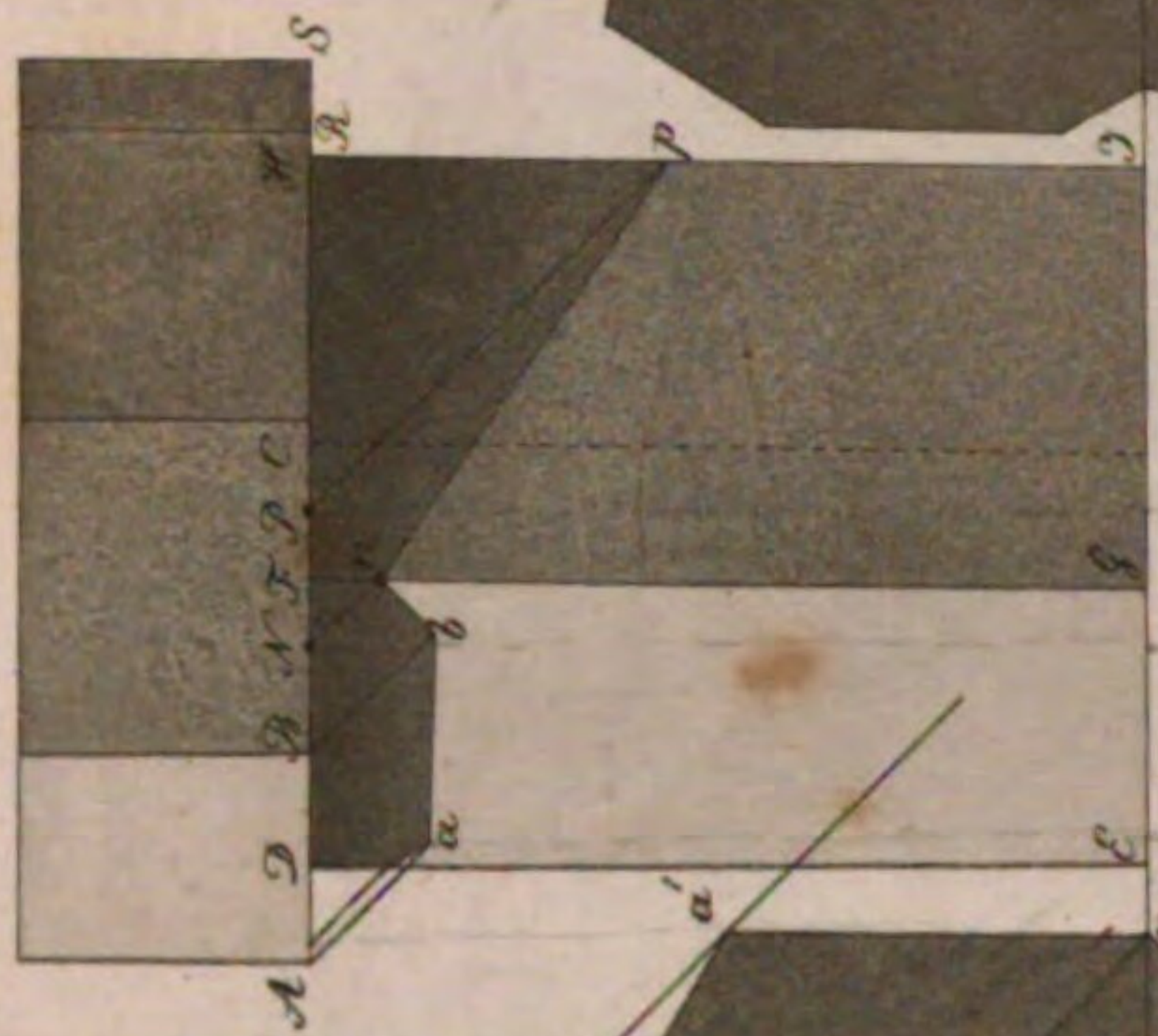
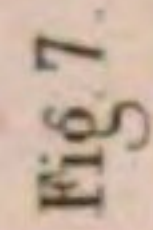
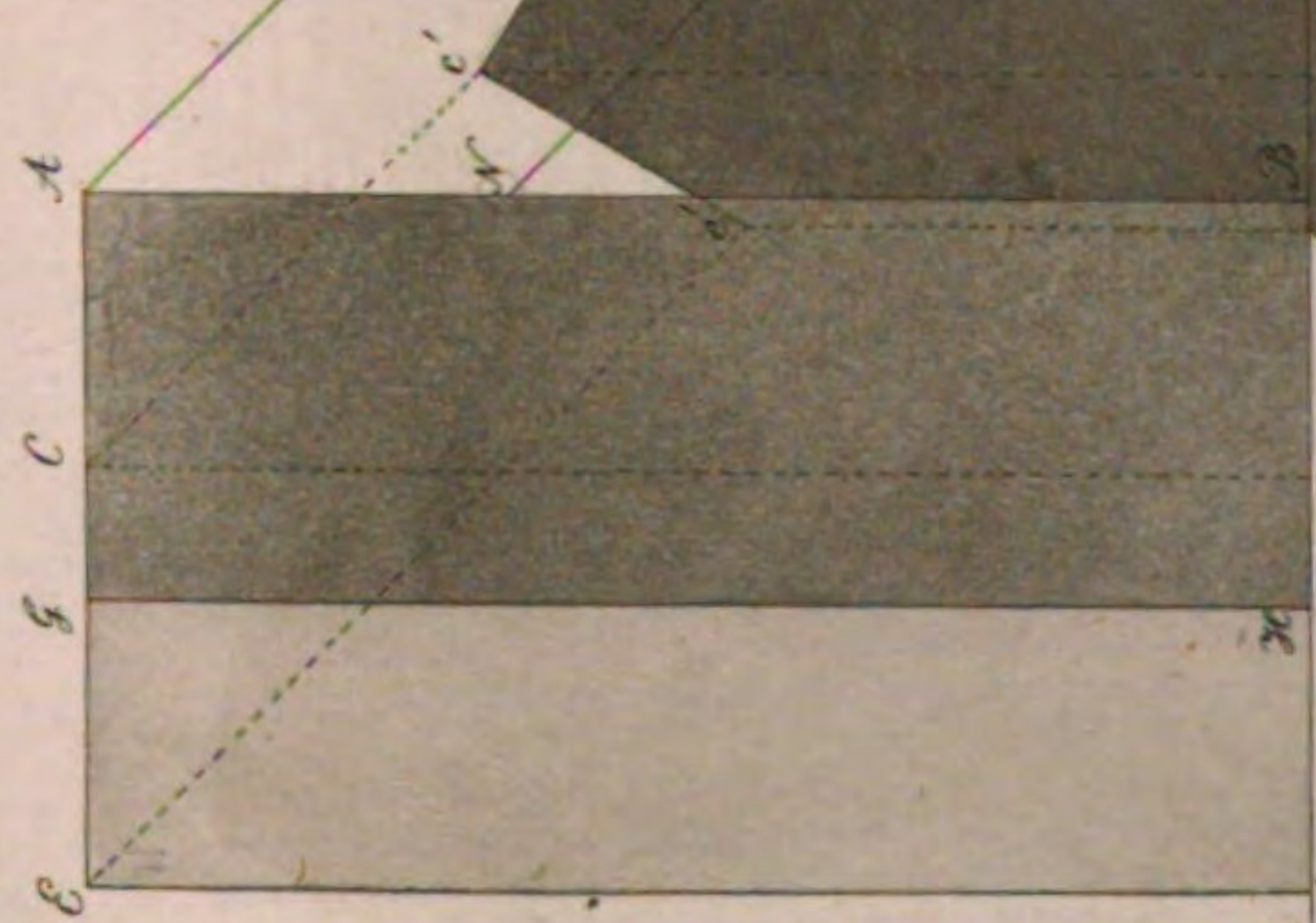
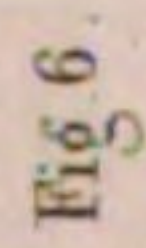
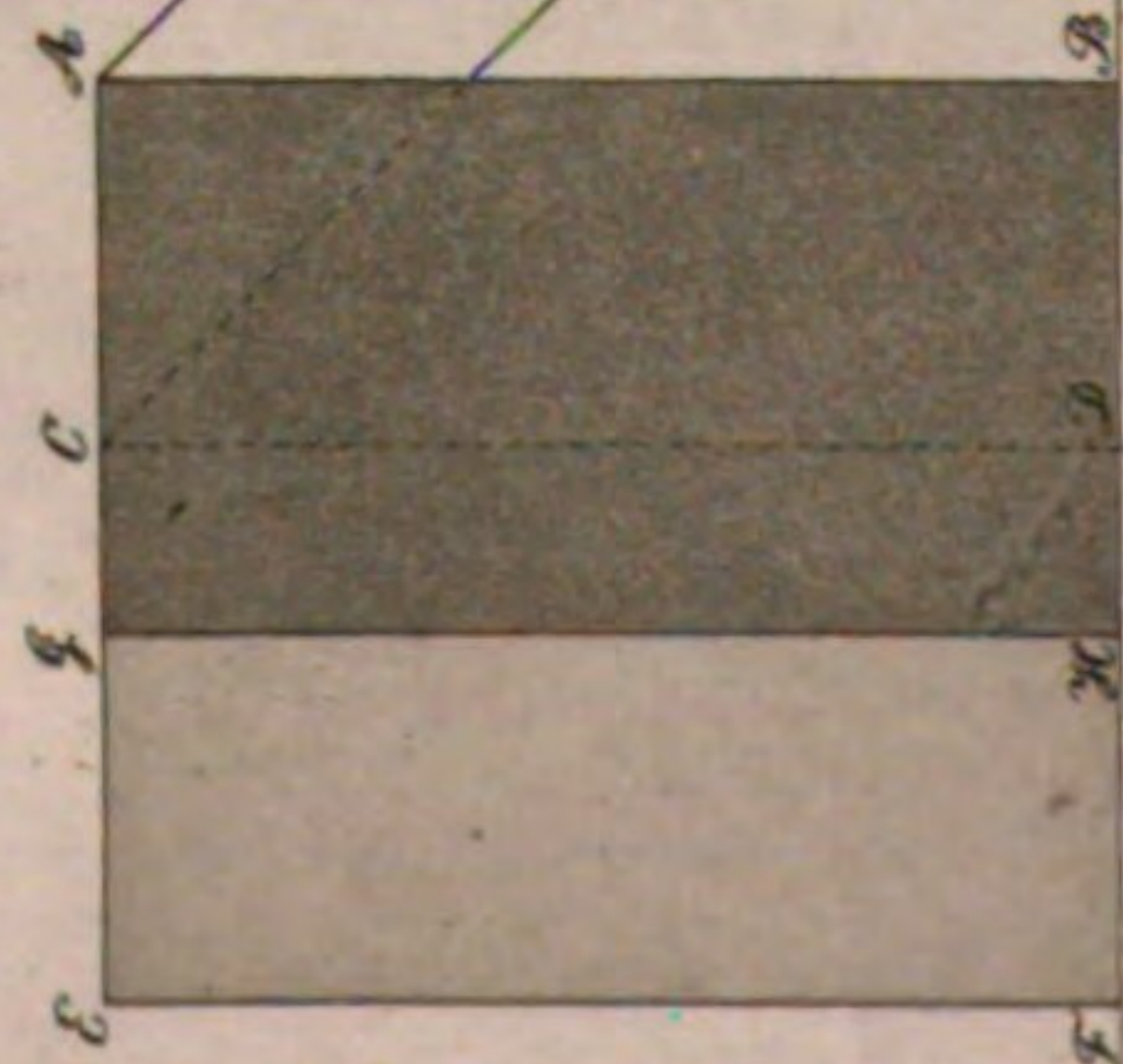
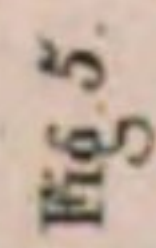
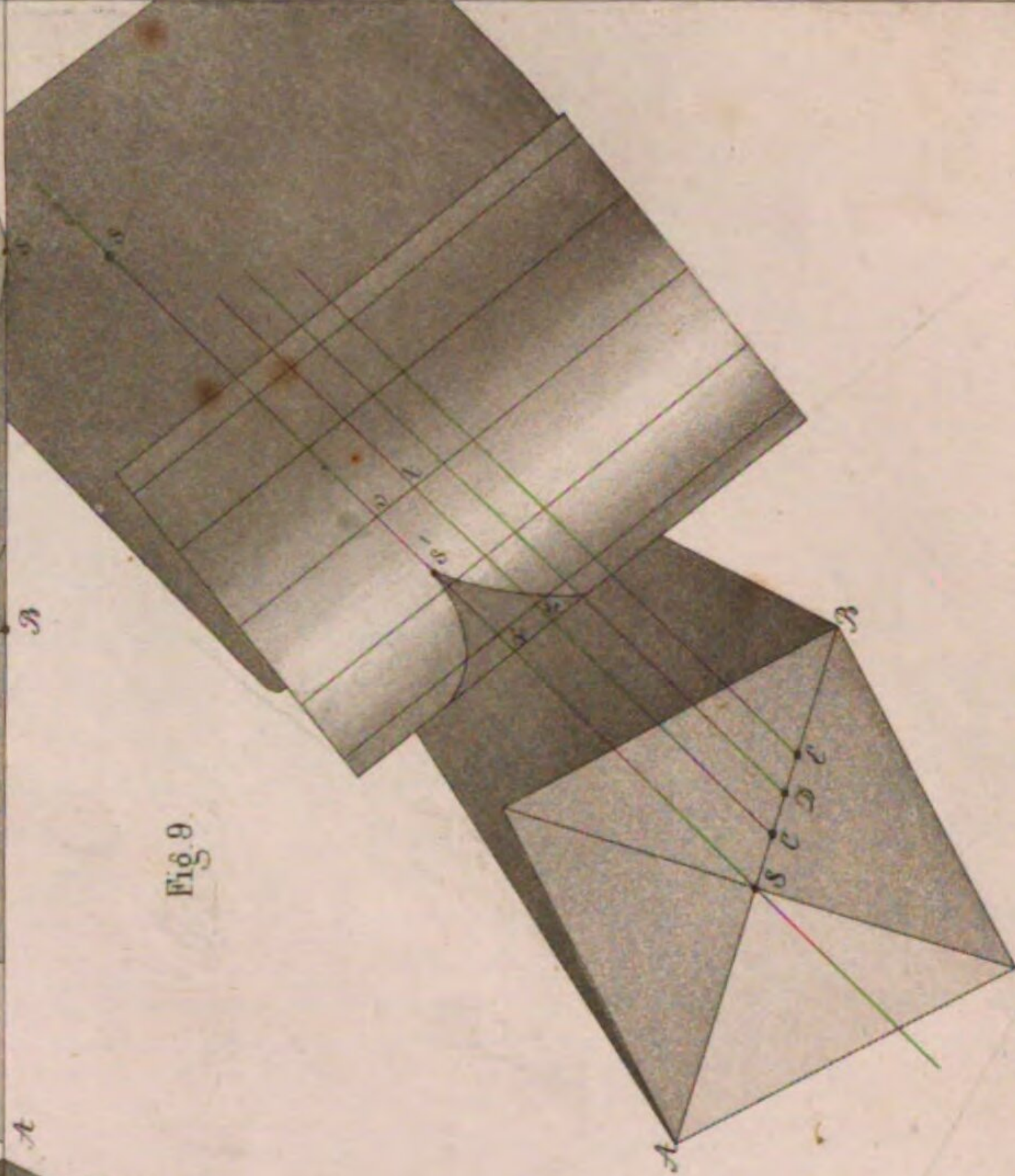
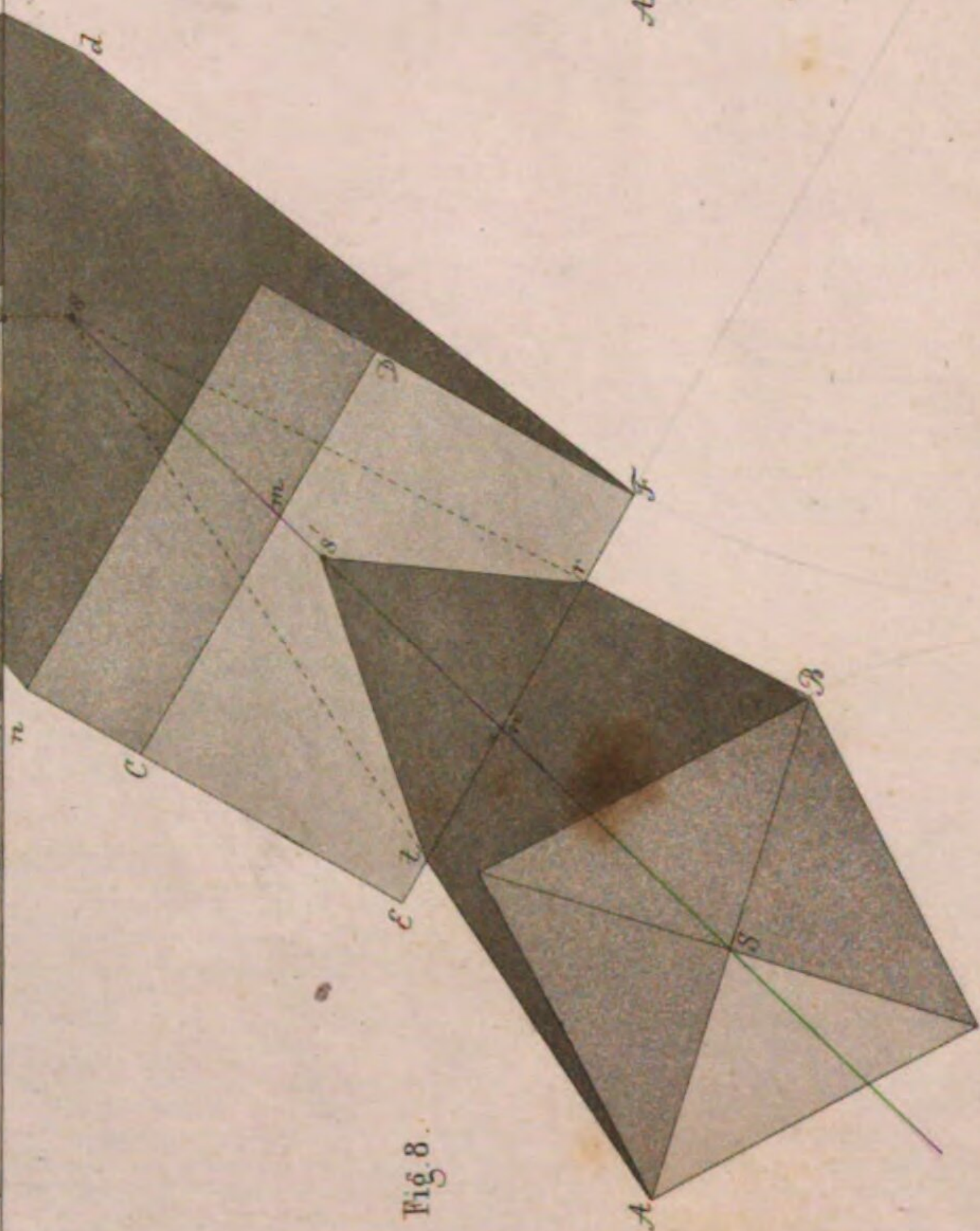
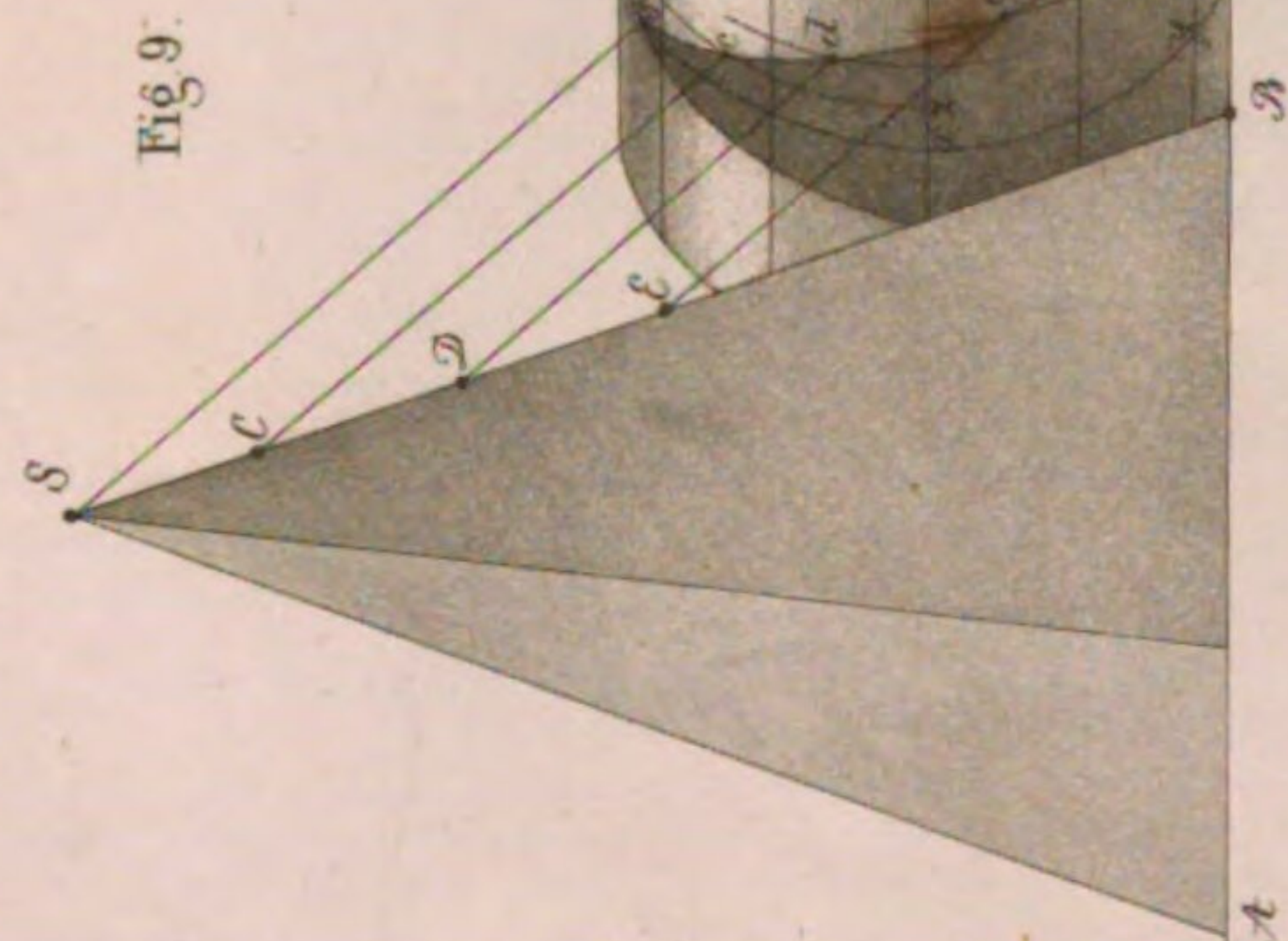


Fig 2.







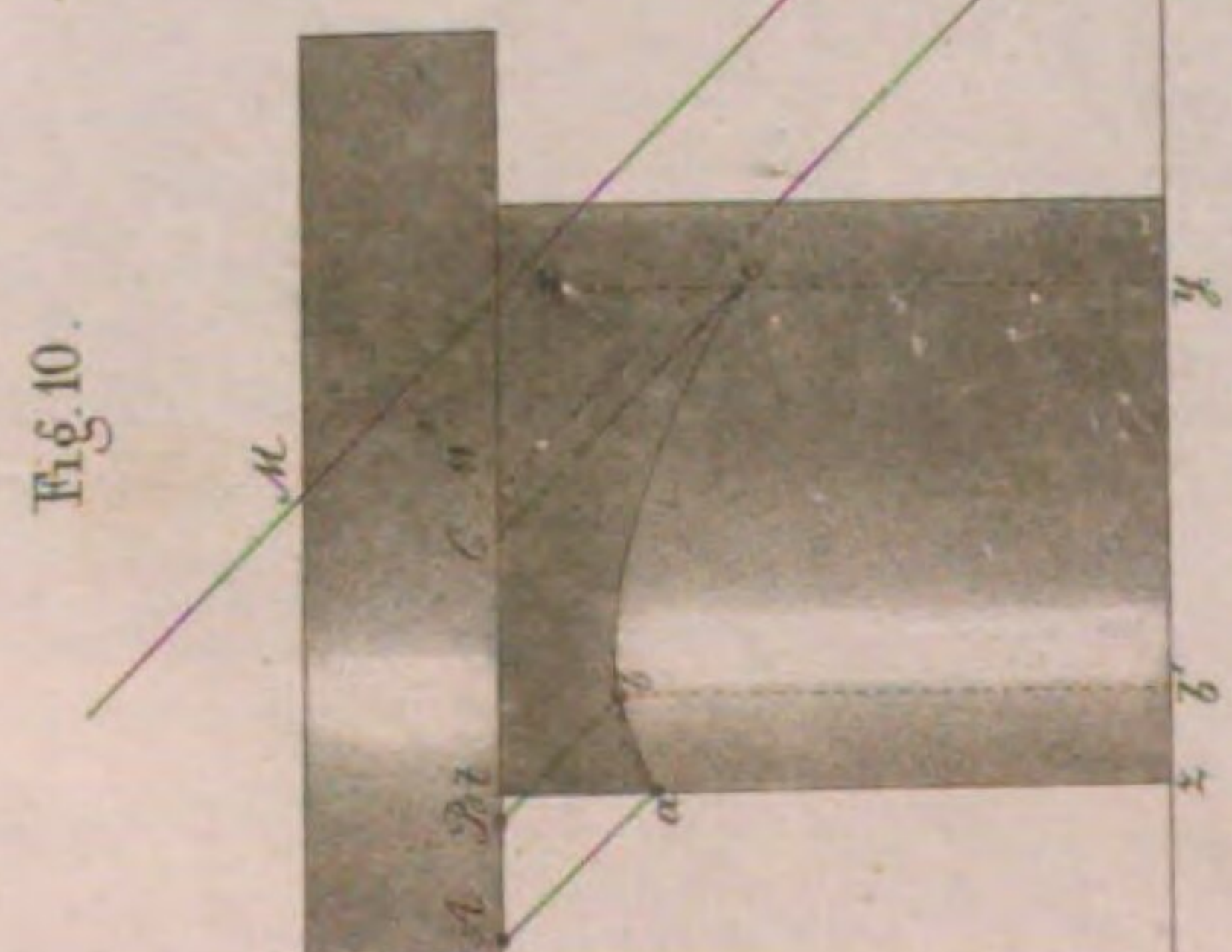


Fig. 10.

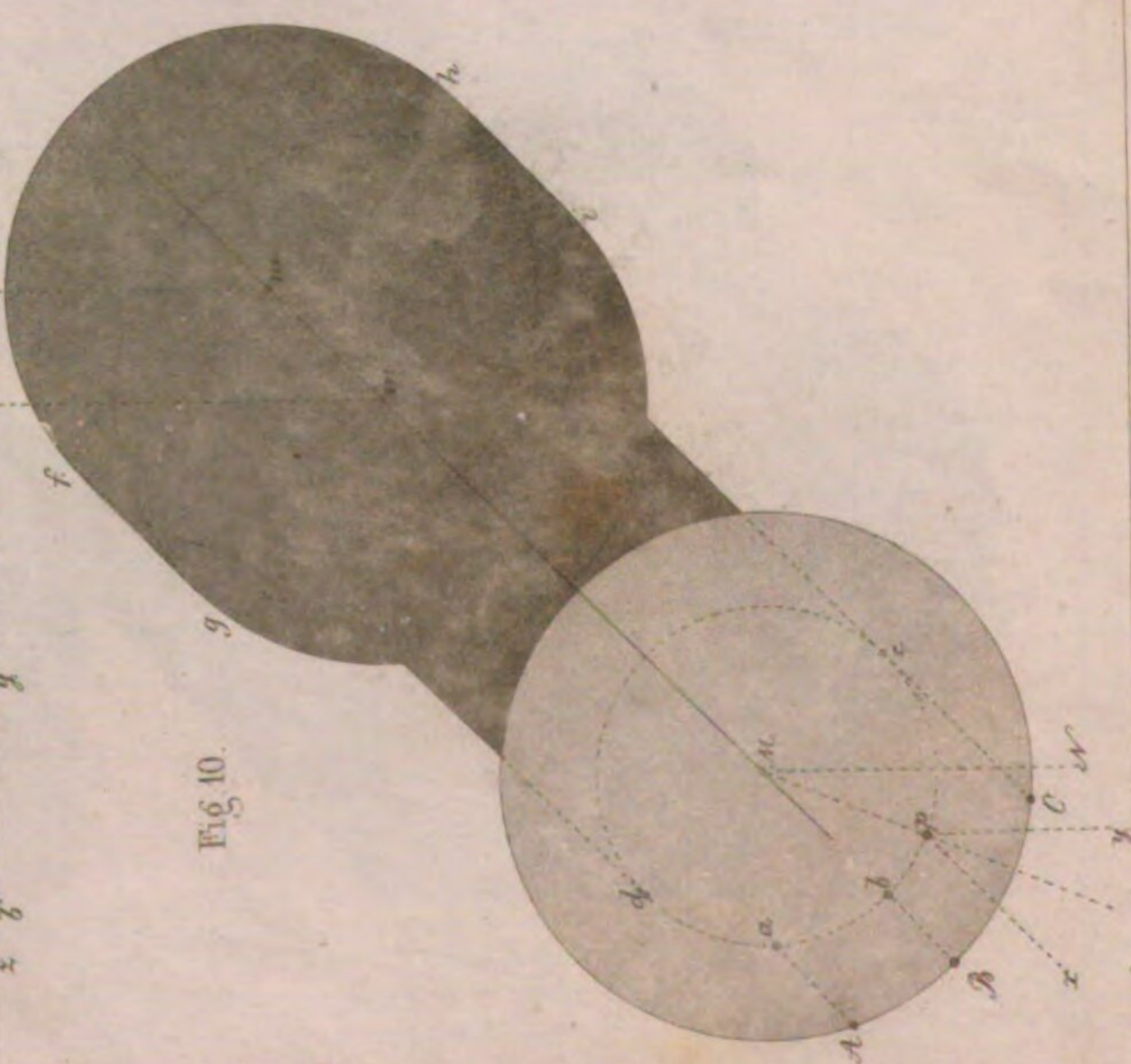


Fig. 10.

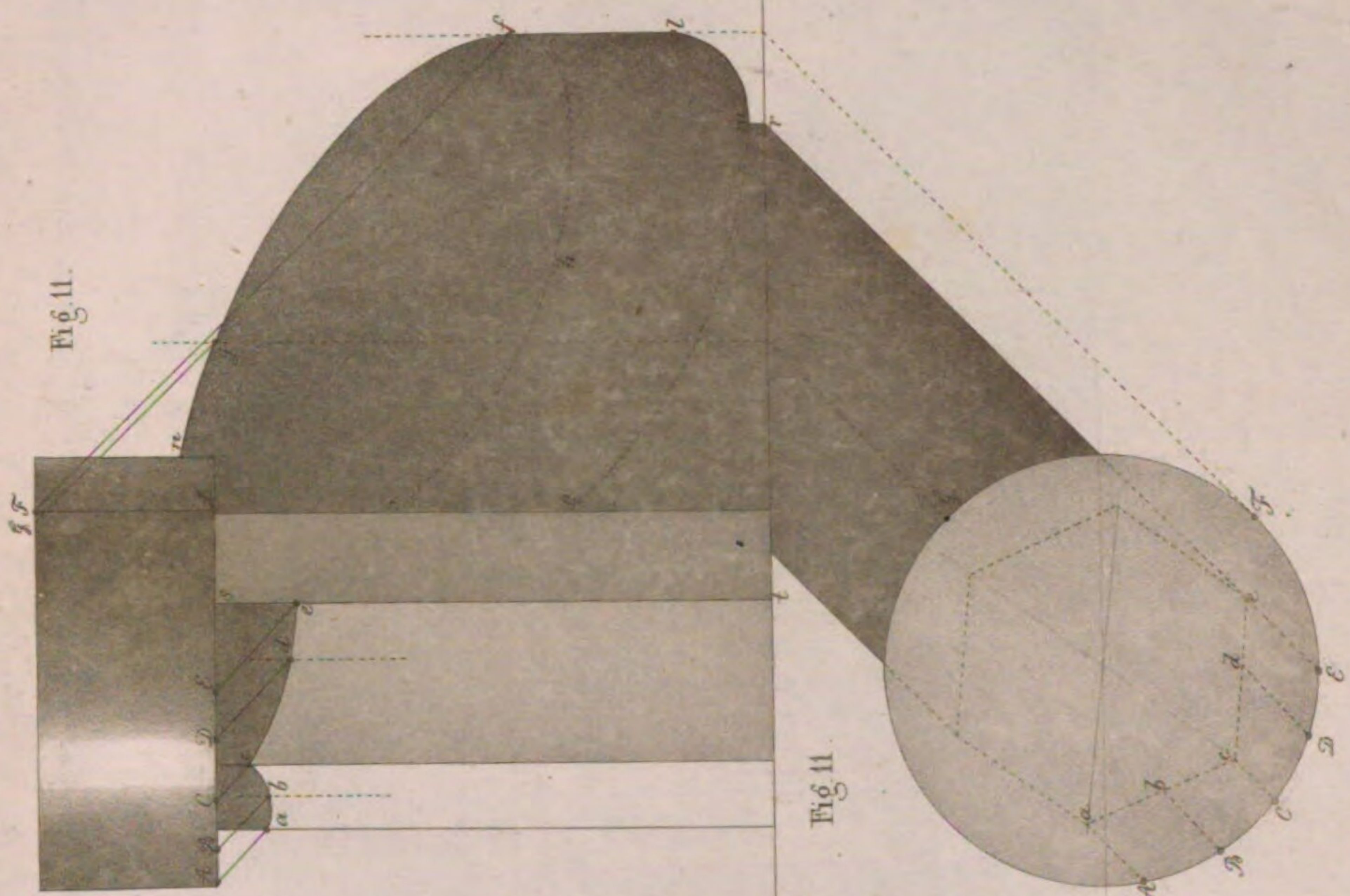


Fig. 11.

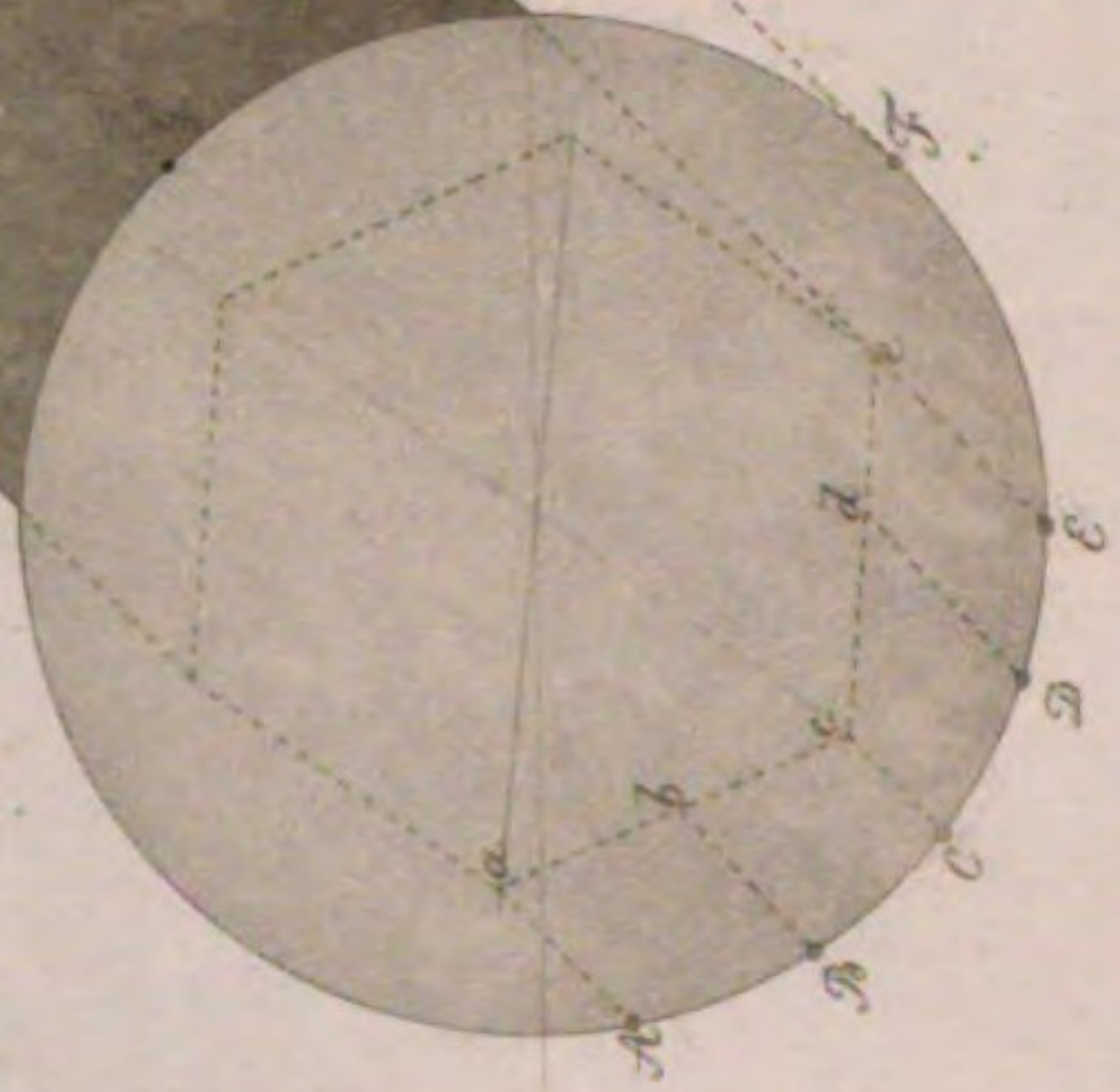


Fig. 11

Fig. 12.

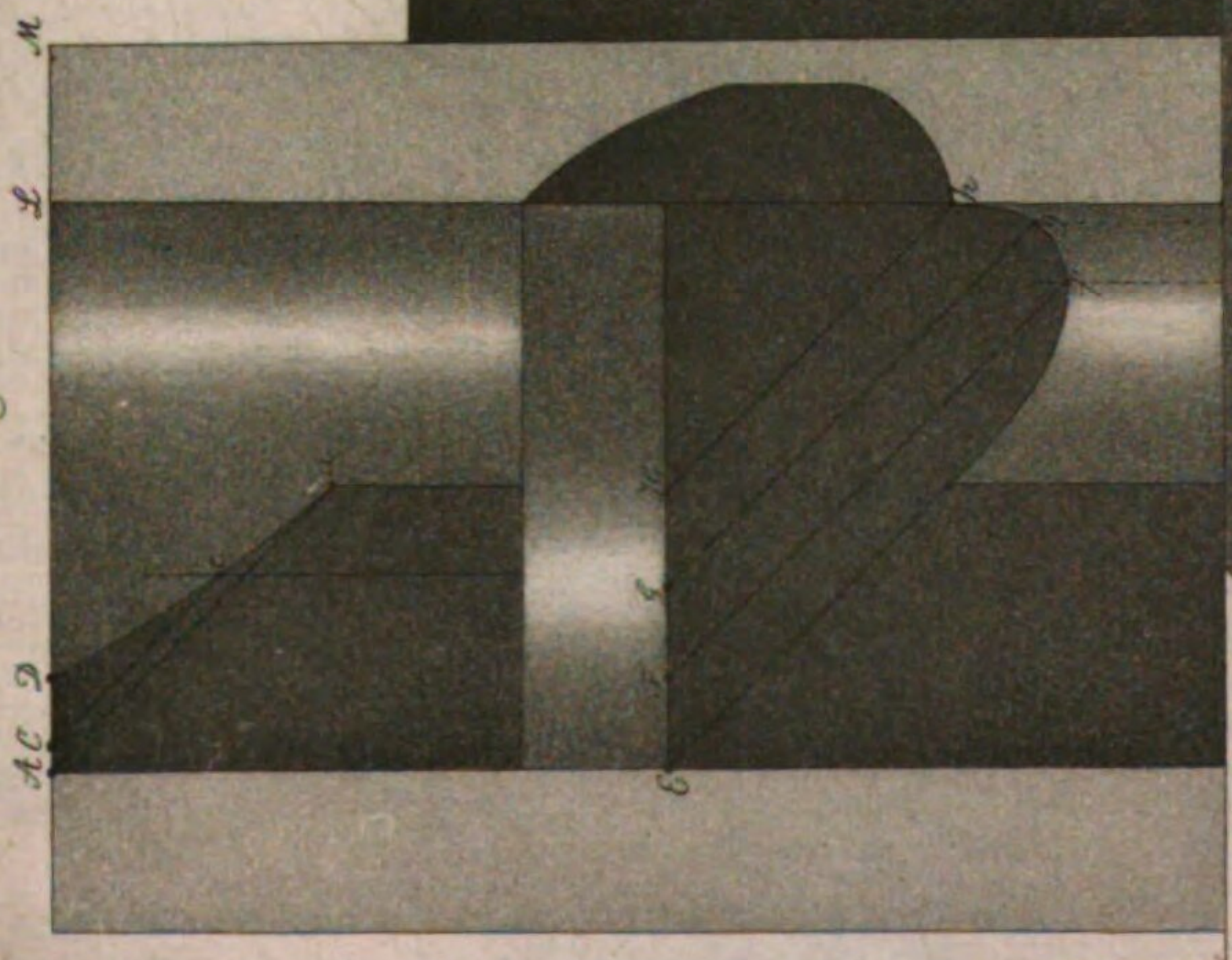


Fig. 13.

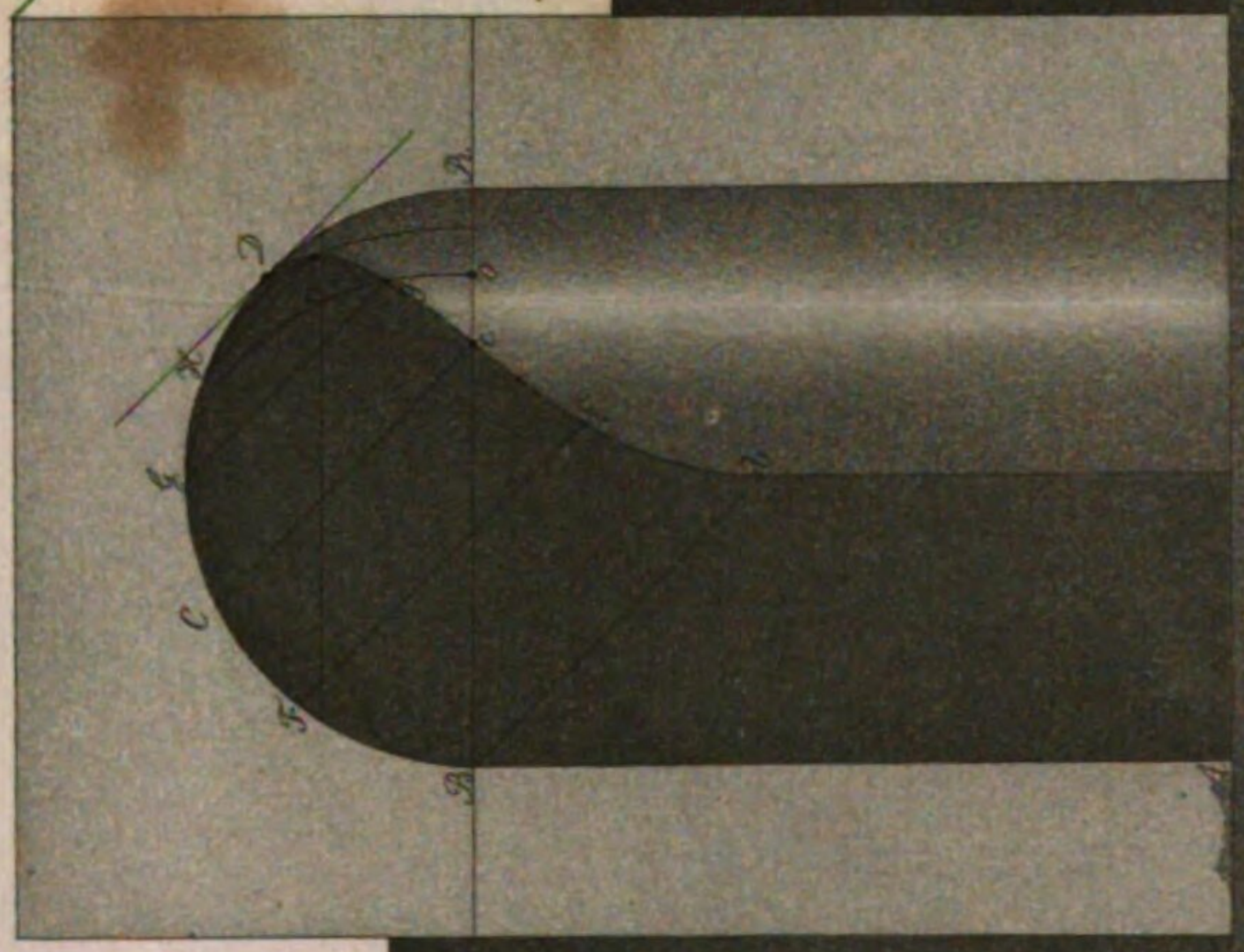


Fig. 14.

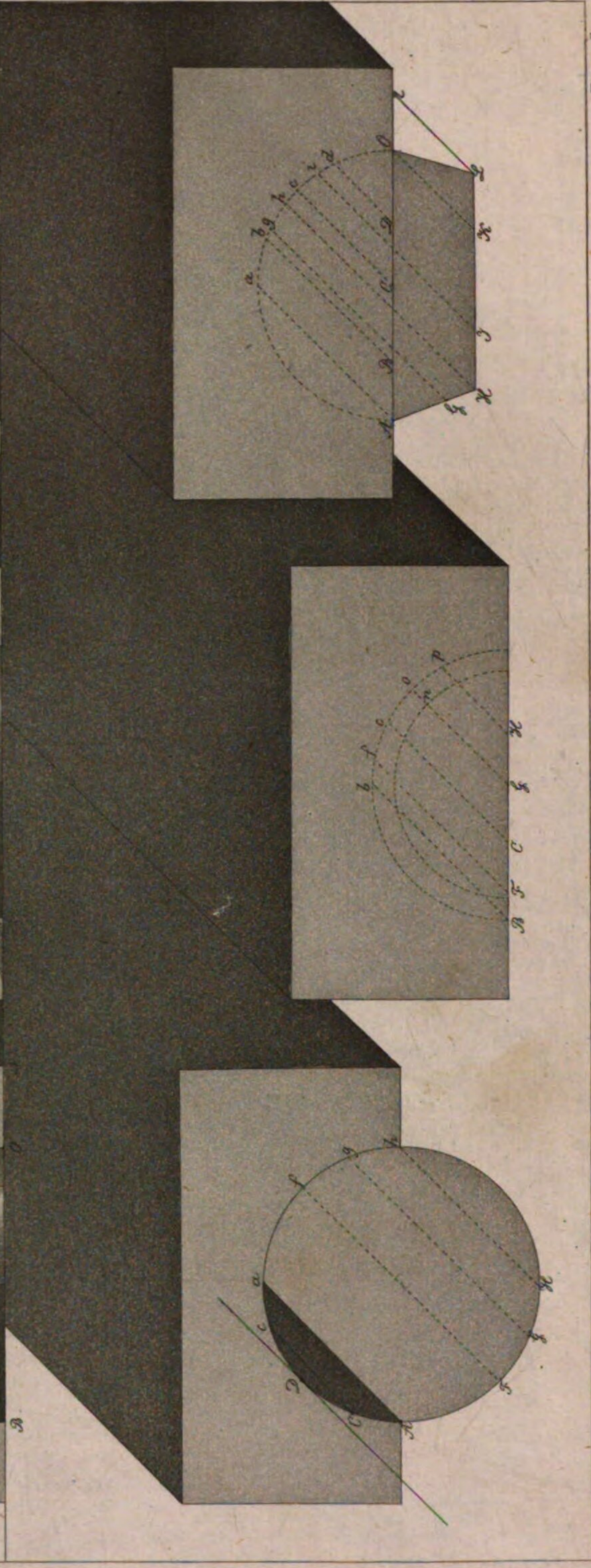
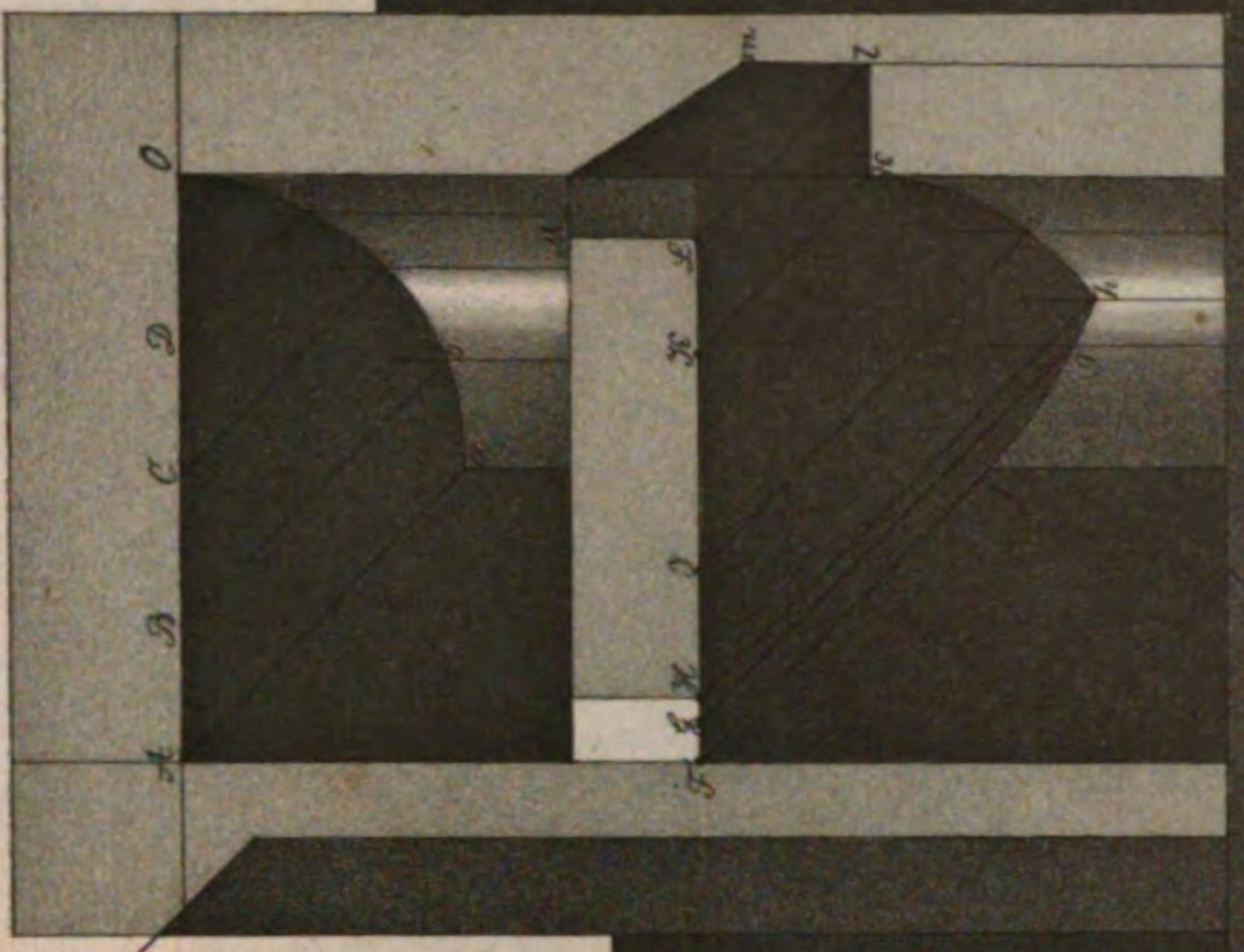


Fig 15.

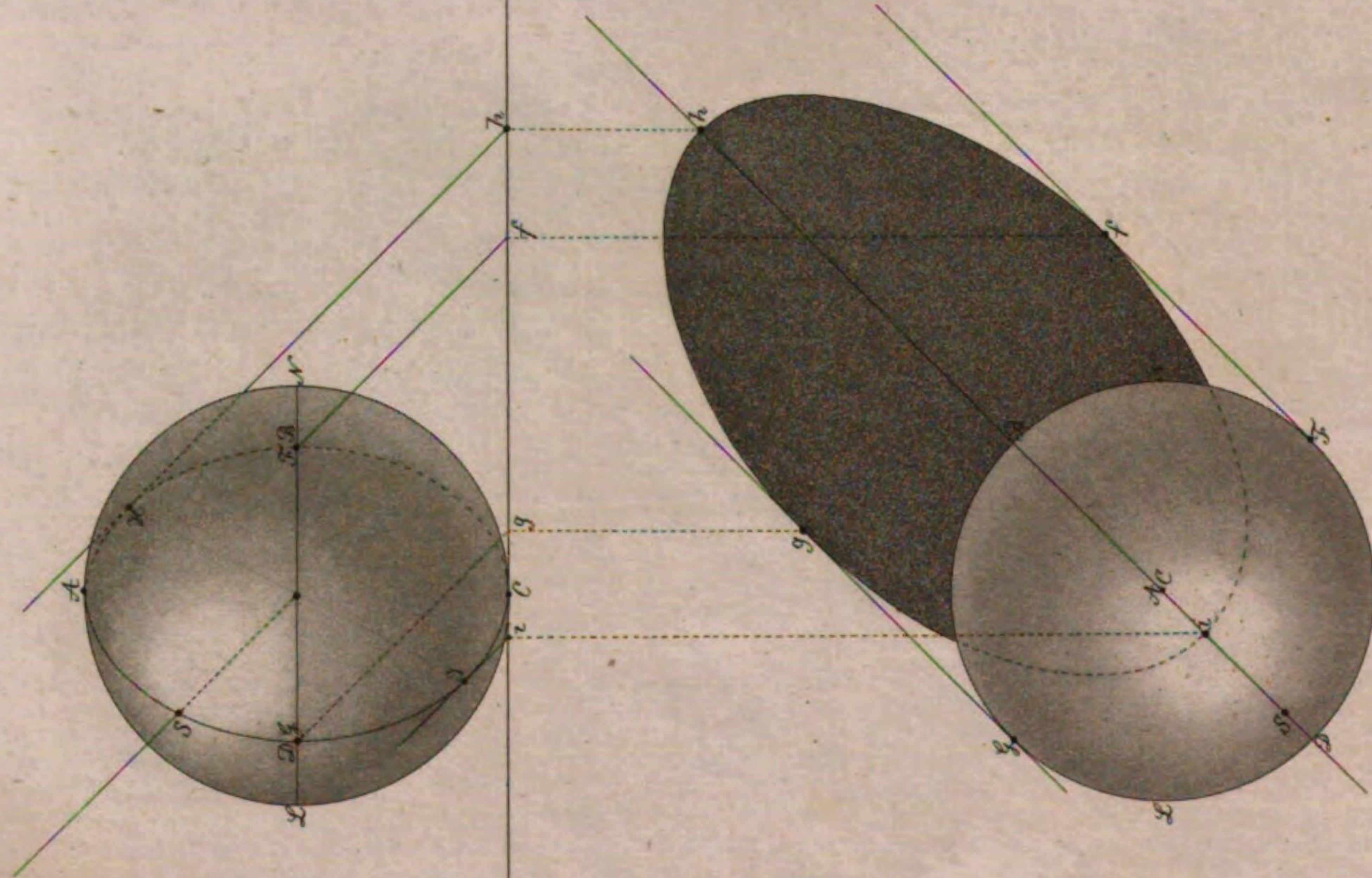


Fig. 16.

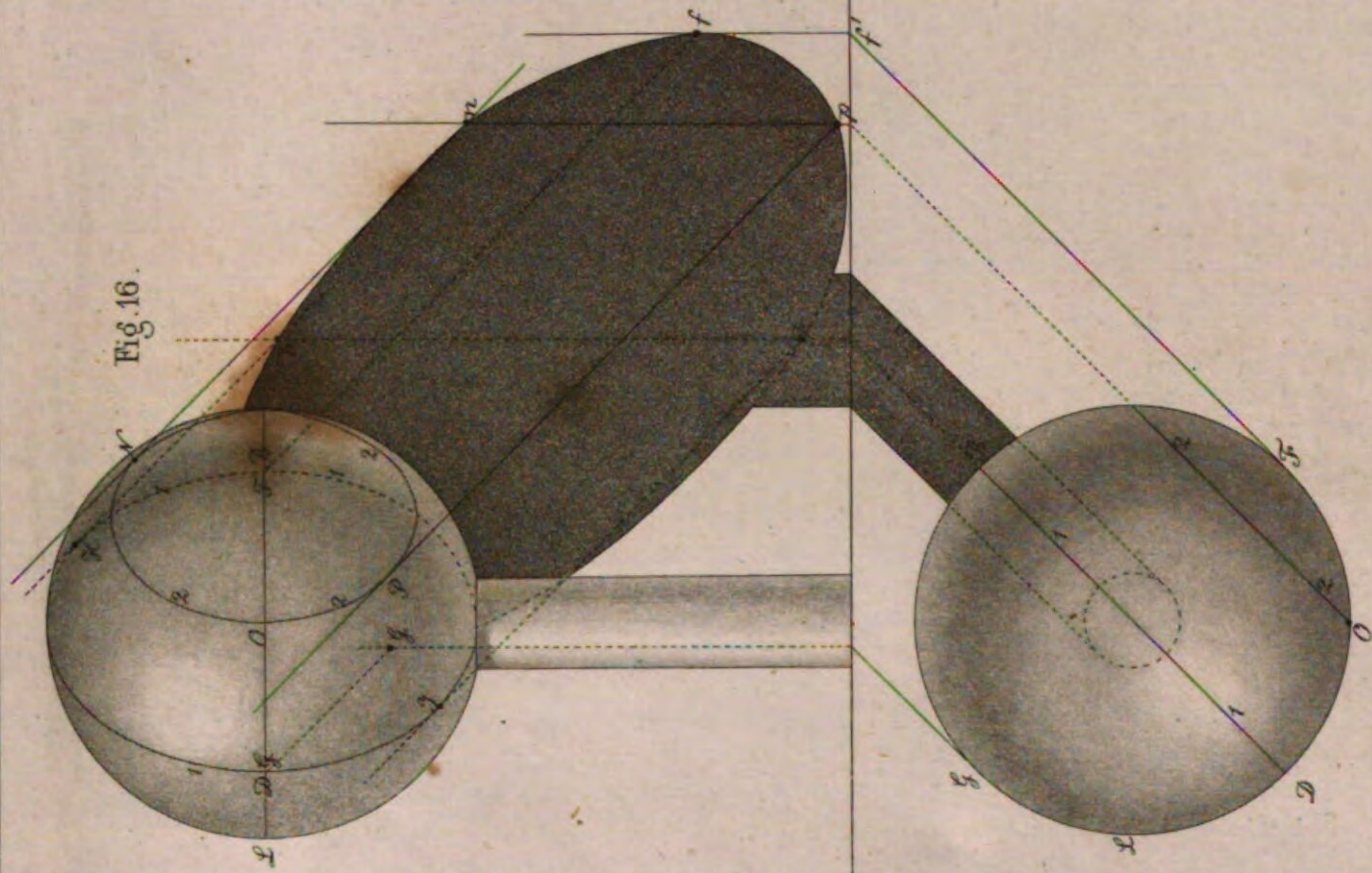
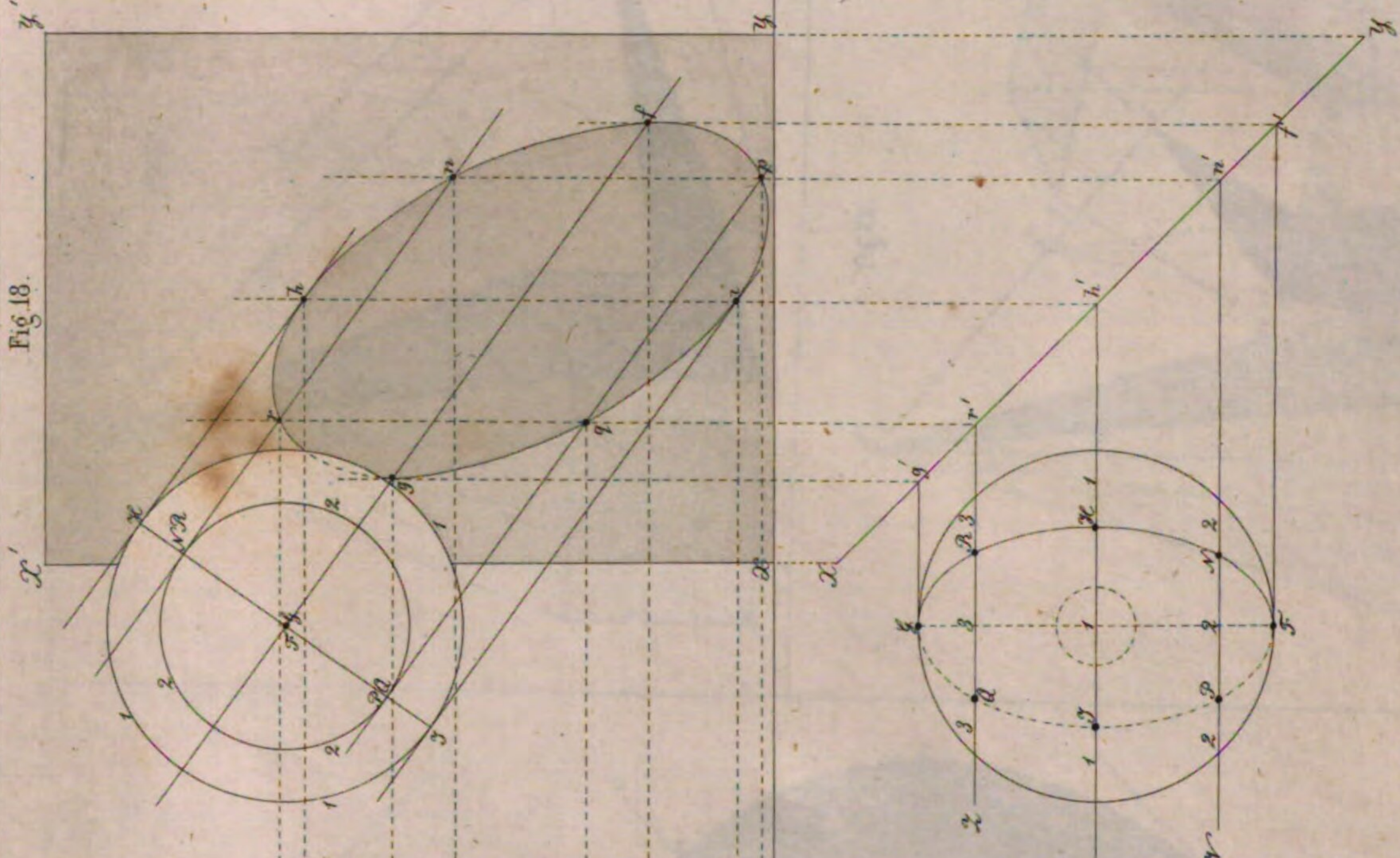


Fig. 18.



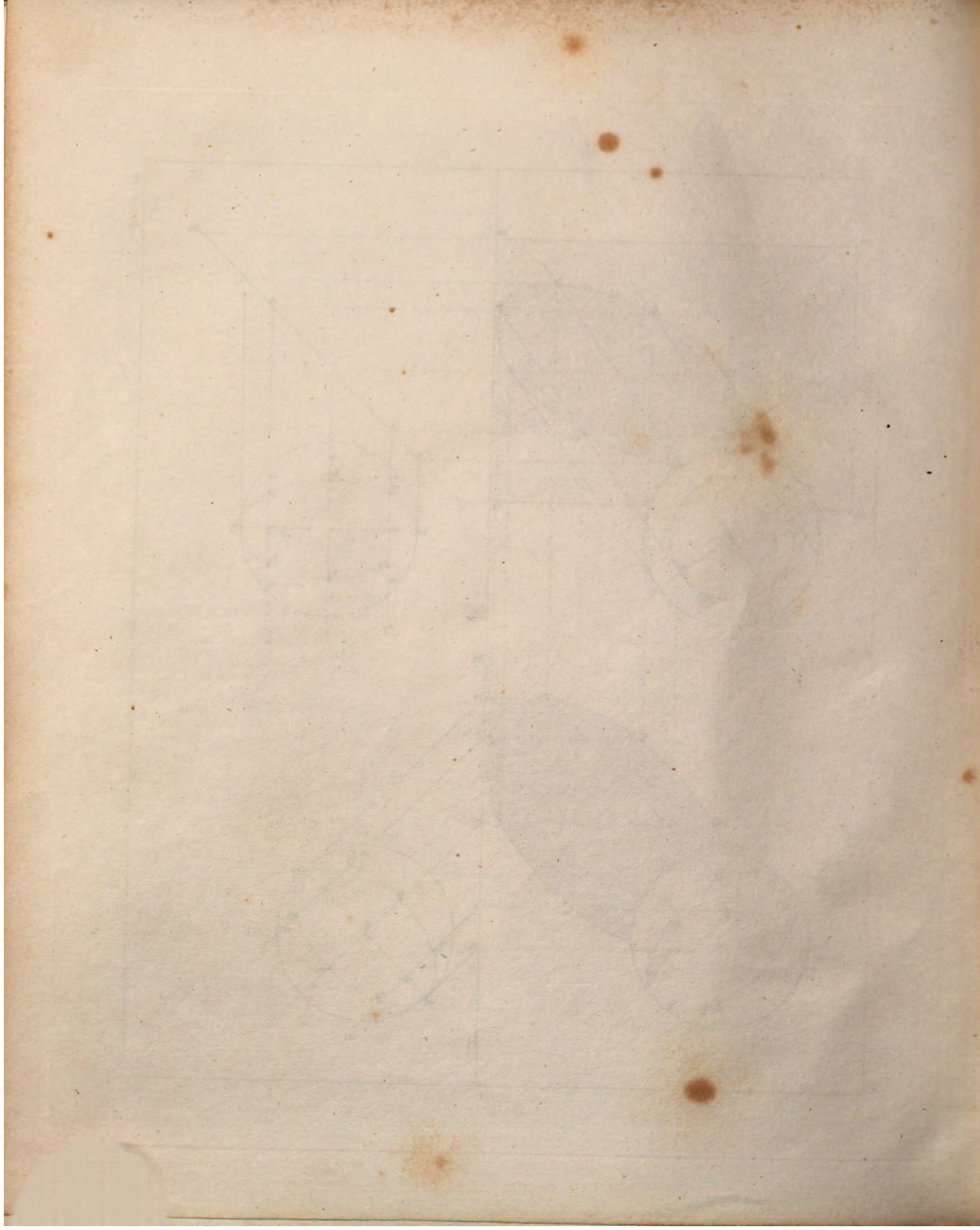


Fig 19.

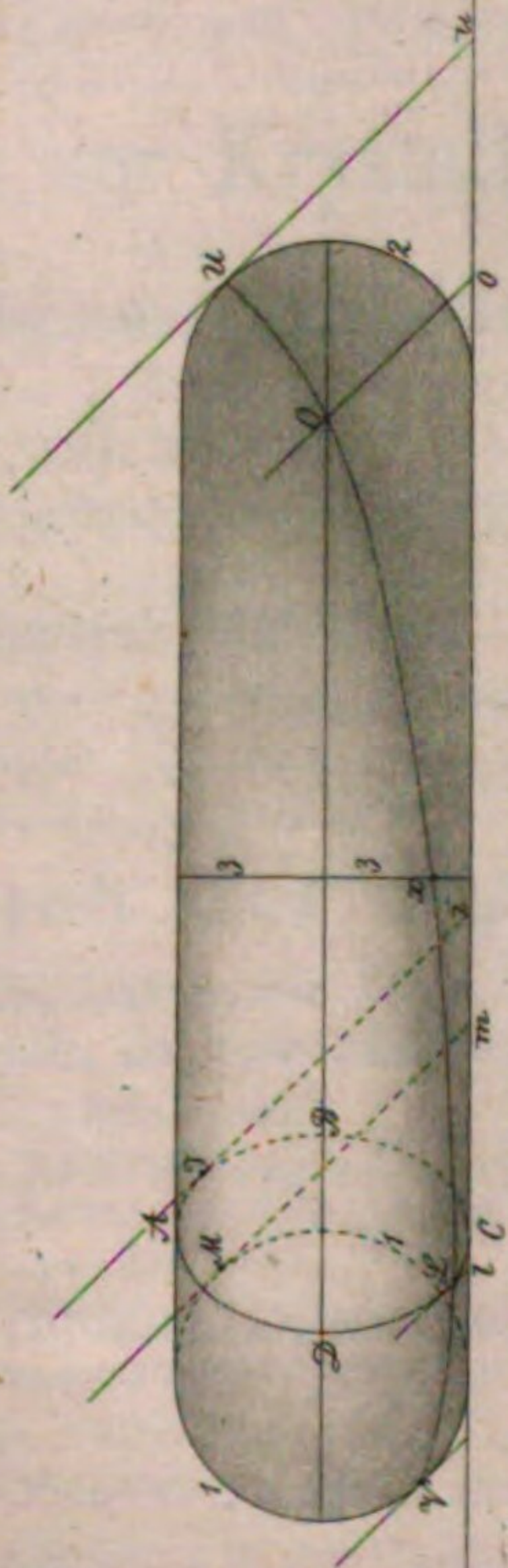


Fig 19.

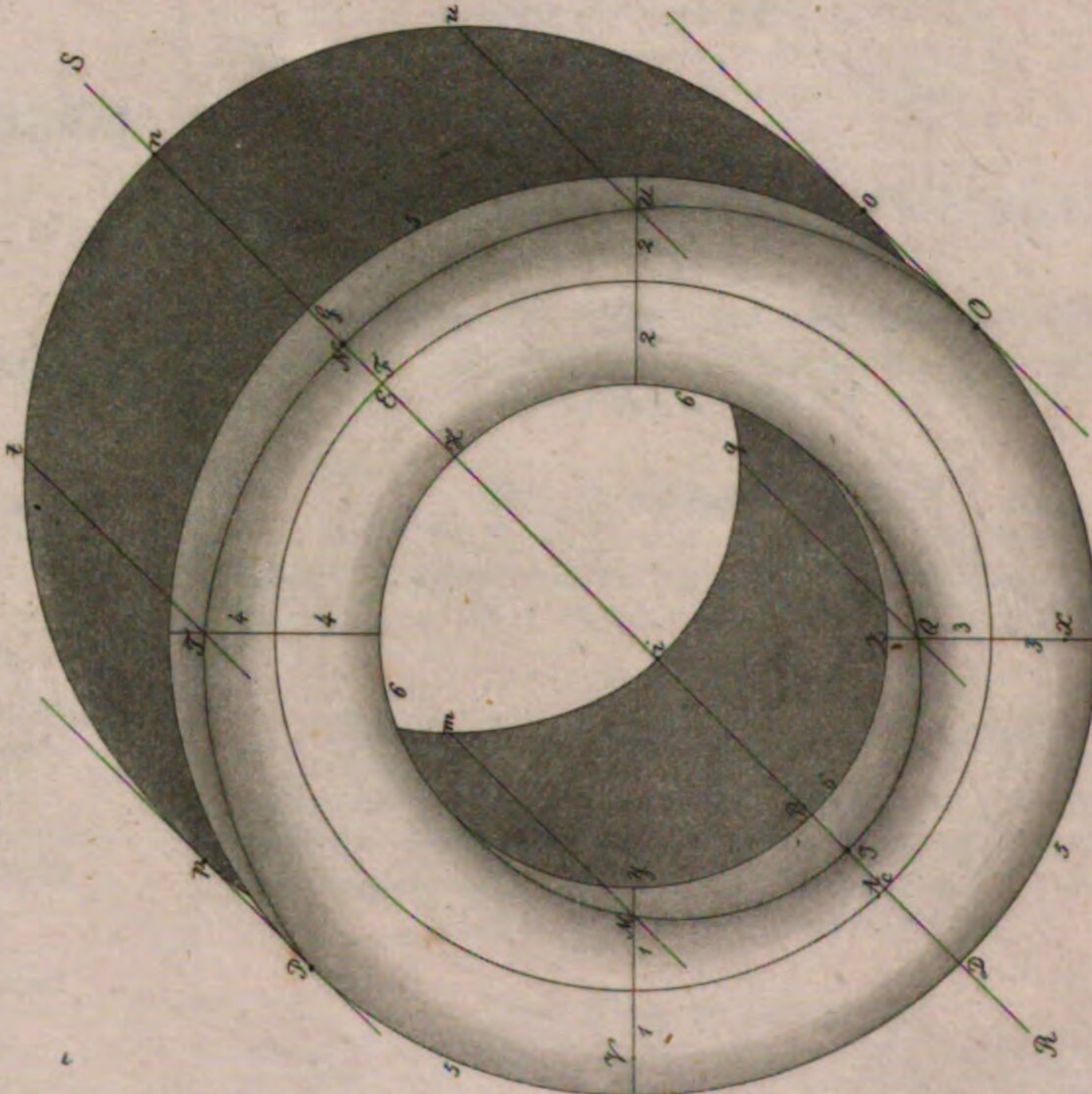


Fig 20.

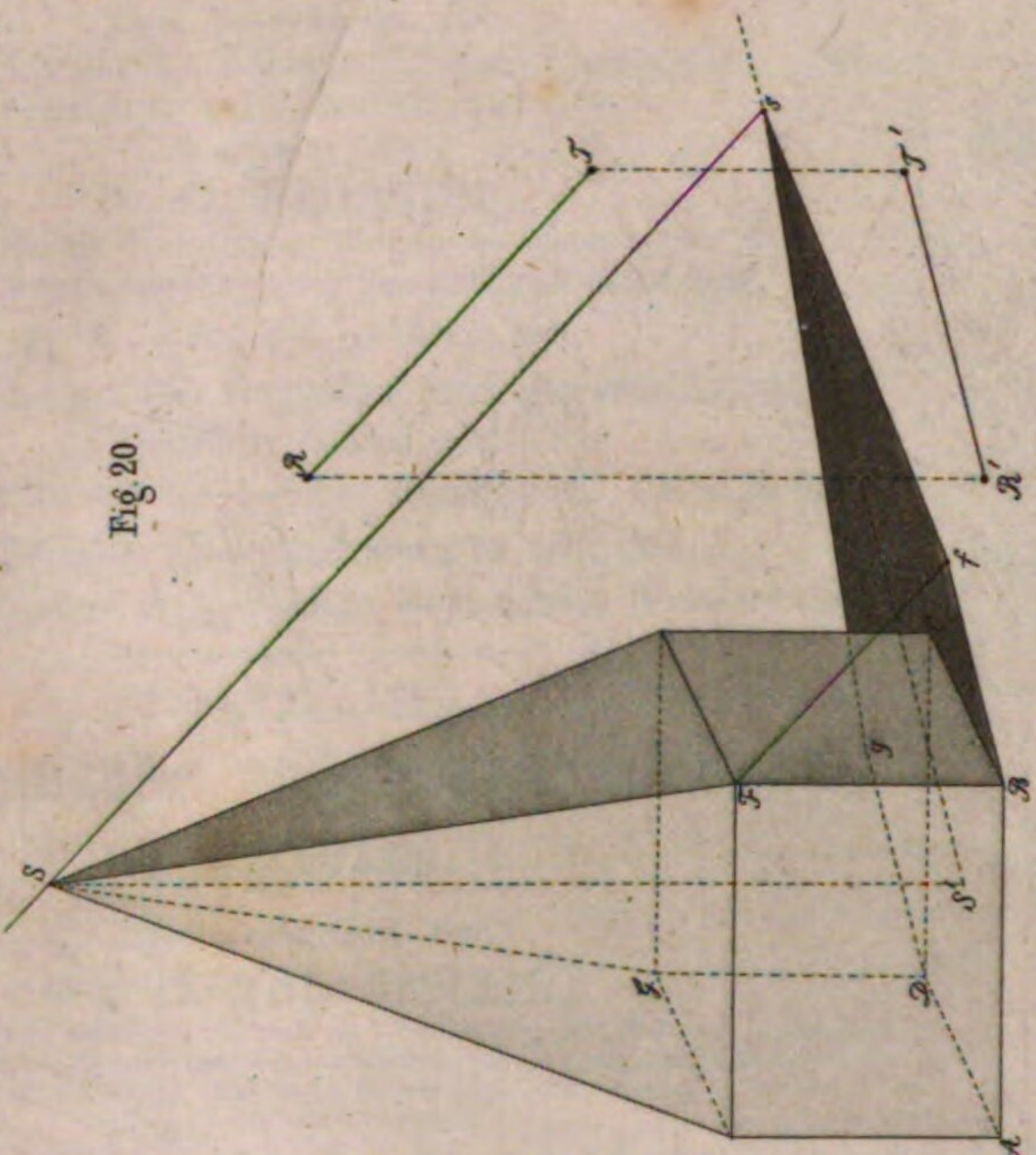
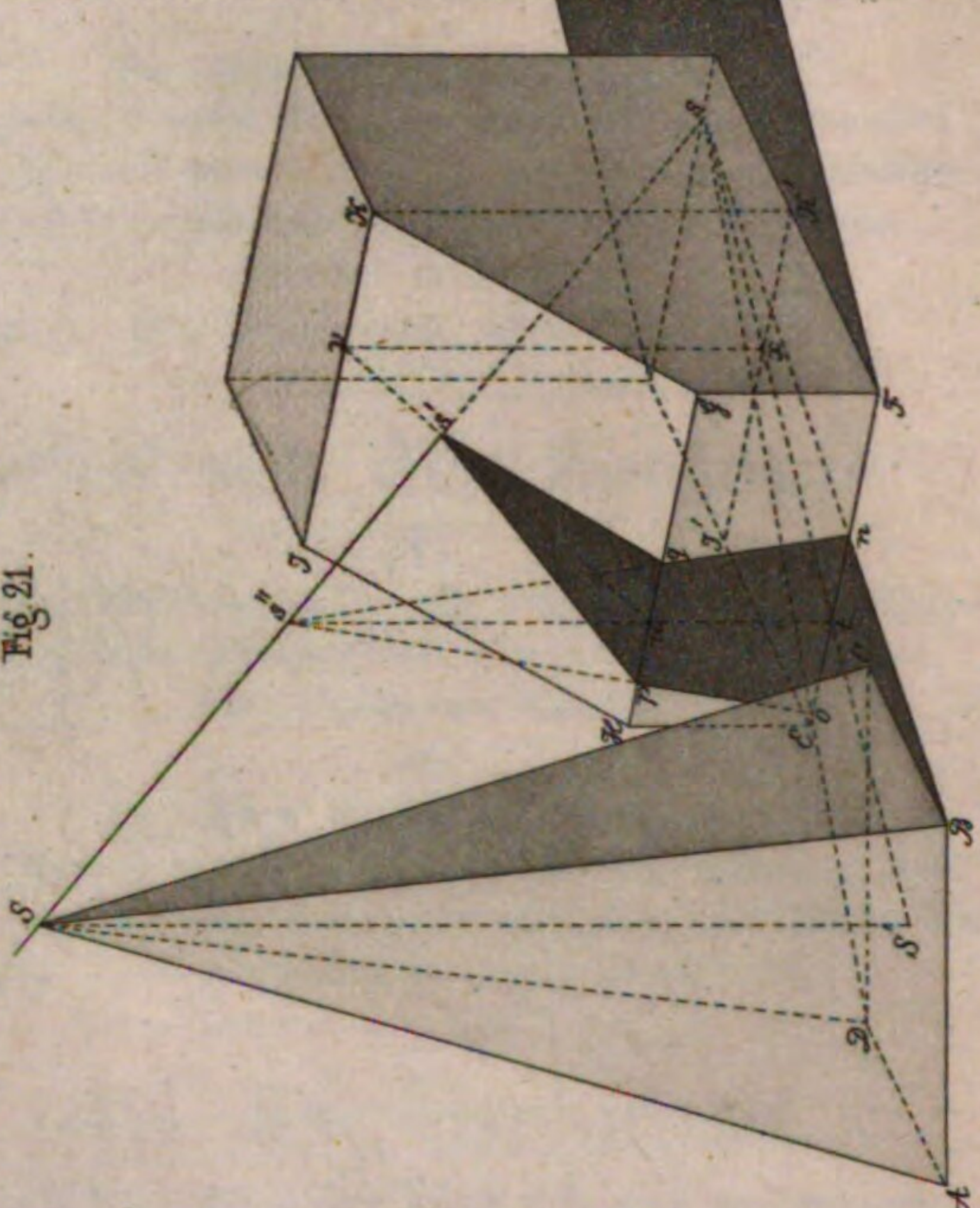


Fig 21.



Aufgaben aus der Physik

nebst ihren Auflösungen
und

einem Anhang, physikalische Tabellen enthaltend.

Zum Gebrauche für

Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und
besonders beim Selbstunterricht

bearbeitet von

Dr. C. Fliedner,

Oberlehrer am Königl. Gymnasium, früher an der Realschule in Hanau.

Vierte verbesserte und vermehrte Auflage.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh.

1. Abtheilung: Die Aufgaben und physikalischen
Tabellen enthaltend.

Mit 56 in den Text eingedruckten Holzstichen. Preis 16 Sgr.

2. Abtheilung: Die Auflösungen enthaltend.

Mit 106 in den Text eingedruckten Holzstichen. Preis 28 Sgr.

Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln.

Herausgegeben von

Dr. O. Schlömilch,

Königl. Sächsischer Geheimer Hofrath und Professor, Mitglied der Königl.
Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, der Königl.
Schwedischen Akademie zu Stockholm, der Kaiserl.
Leopoldinischen Akademie etc.

Galvanoplastische Stereotypie.

Wohlfeile Schulausgabe.

Zweite Auflage.

8. Fein Velinpapier. geh. Preis 10 Sgr.

Die Elemente der Krystallographie

mit
stereoskopischer Darstellung
der
Krystallformen.

Für höhere Lehranstalten und zum Selbststudium

von

J. Martius-Matzdorff.

Mit 118 in den Text eingedruckten Holzstichen.

4. Fein Velinpapier. geh. Preis 1 Thlr. 20 Sgr.

Das Buch der Natur,

die Lehren der Physik, Astronomie, Chemie, Mineralogie,
Geologie, Botanik, Zoologie und Physiologie
umfassend.

Allen Freunden der Naturwissenschaft, insbesondere den
Gymnasien, Realschulen und höheren Bürgerschulen
gewidmet von

Dr. Friedrich Schoedler,

Director der Grossherzoglich Hessischen Realschule in Mainz.

In zwei Theilen.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh.

Erster Theil: Physik, Astronomie und Chemie. Achtzehnte
verbesserte Auflage. Mit 407 in den Text eingedruckten Holz-
stichen, einer Spectraltafel in Farbendruck, Sternkarten und
einer Mondkarte. Preis 1 Thlr. 10 Sgr.

Zweiter Theil: Mineralogie, Geognosie, Geologie, Botanik,
Zoologie und Physiologie. Achtzehnte verbesserte Auf-
lage. Mit 675 in den Text eingedruckten Holzstichen und einer
geognostischen Tafel in Farbendruck. Preis 1 Thlr. 18 Sgr.

Lehrbuch der Botanik

für Gymnasien, Realschulen, forst- und landwirthschaft-
liche Lehranstalten, pharmaceutische Institute etc. sowie
zum Selbstunterrichte

von

Dr. Otto Wilhelm Thomé,

ordentl. Lehrer an der städtischen Realschule erster Ordnung zu Köln.

Mit 890 verschiedenen in den Text eingedruckten Holzstichen.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.

Zweiter Abdruck.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 1 Thlr.

Lehrbuch der Zoologie

für

Gymnasien, Realschulen, forst- und landwirthschaftliche
Lehranstalten, pharmaceutische Institute etc. sowie
zum Selbstunterrichte

von

Dr. Otto Wilhelm Thomé,

ordentl. Lehrer an der städtischen Realschule erster Ordnung zu Köln.

Mit 544 verschiedenen in den Text eingedruckten Holzstichen.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 1 Thlr.

Die Kegelschnitte.

Ein Leitfaden für Gewerbeschulen und das gewerb-
liche Leben.

Von **Dr. Beyssell,**

Lehrer an der Gewerbeschule zu Crefeld.

Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein
Velinpapier. geh. Preis 12 Sgr.

Physikalisches Repetitorium

oder

die wichtigsten Sätze der elementaren Physik.

Zum Zwecke erleichterter Wiederholung übersichtlich
zusammengestellt

von

Dr. Ferdinand Bothe,

Director der Königl. Provinzial-Gewerbeschule in Saarbrücken.

Zweite umgearbeitete und vervollständigte Auflage.

gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 20 Sgr.

Die Schule der Chemie,

oder erster Unterricht in der Chemie, versinnlicht durch
einfache Experimente. Zum Schulgebrauch und zur
Selbstbelehrung, insbesondere für angehende Apotheker,
Landwirthe, Gewerbtreibende etc.

Von

Dr. J. A. Stöckhardt,

Königl. Sächs. Hofrath, Professor der Chemie an der Königl. Akademie für
Forst- und Landwirthe zu Tharand und K. S. Apothekenrevisor.

Siebenzehnte vermehrte und verbesserte Auflage.

Mit 219 in den Text eingedruckten Holzstichen und
einer farbigen Spectraltafel.

8. Fein Velinpap. geh. Preis 2 Thlr. 10 Sgr.

Motto: „Experimente, Figuren, Exempel müssen beim
Unterrichte den Text bilden, in dessen Interpre-
tation der Schüler zur eignen Gewandtheit und
Fertigkeit gelangen soll.“ **Liebig.**

Müller-Pouillet's
Lehrbuch
der
Physik und Meteorologie.
In zwei Bänden.

Siebente umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Mit 1798 in den Text eingedruckten Holzstichen, 15 Stahl-
stich-Tafeln, zum Theil in Farbendruck, und einer
Photographie.
gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 10 Thlr.

Lehrbuch der kosmischen Physik.

Von
Dr. Joh. Müller,
Professor der Physik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.
Dritte umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Mit 385 in den Text eingedruckten Holzstichen und 25 dem
Text beigegebenen, sowie einem Atlas von 40 zum
Theil in Farbendruck ausgeführten Tafeln.
Auch unter dem Titel:
Müller-Pouillet's
Lehrbuch der Physik und Meteorologie.
Dritter Band.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 7 Thlr. 10 Sgr.

Anfangsgründe
der
geometrischen Disciplinen
für

Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen, sowie auch
zum Selbstunterrichte bearbeitet von
Dr. Joh. Müller,
Professor der Physik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.
In drei Theilen.
Erster Theil:
**Elemente der ebenen Geometrie und
Stereometrie.**
Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.
Mit 143 in den Text eingedruckten Holzstichen, einer Maass-
stabtafel und einer Tafel mit vier Transporteuren.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 15 Sgr.
Zweiter Theil:
**Elemente der ebenen und sphärischen
Trigonometrie.**
Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.
Mit 25 in den Text eingedruckten Holzstichen und einer Tafel
mit Netzen.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 10 Sgr.
Dritter Theil:
**Elemente der analytischen Geometrie in
der Ebene und im Raum.**
Mit 90 in den Text eingedruckten Holzstichen und einer Tafel
mit Netzen.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 15 Sgr.

Grundriss
der
Physik und Meteorologie.
Für Lyceen, Gymnasien, Gewerbe- und Realschulen
sowie zum Selbstunterrichte.
Von
Dr. Joh. Müller,
Professor der Physik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.
Mit 588 in den Text eingedruckten Holzstichen und einer
Spectraltafel in Farbendruck.
Elfte vermehrte und verbesserte Auflage.
Mit einem Anhang:
Physikalische Aufgaben enthaltend.
gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 2 Thlr.

Mathematischer Supplementband

zum
Grundriss der Physik und Meteorologie.
Von
Dr. Joh. Müller,
Professor der Physik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.
Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.
Mit 230 in den Text eingedruckten Holzstichen. Nebst beson-
ders gedruckten Auflösungen.
gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 1 Thlr. 15 Sgr.

Auflösungen der Aufgaben
des
Grundrisses der Physik und Meteorologie,
sowie des dazu gehörigen
mathematischen Supplementbandes.
Von
Dr. Joh. Müller,
Professor der Physik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.
Zweite Auflage.
Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein
Velinpapier. geh. Preis 15 Sgr.

Elemente der Geometrie.
Streng systematisch dargestellt
von
Dr. Eduard Müller,
Director der Realschule zu Neustrelitz.
In zwei Theilen. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen.
gr. 8. Fein Velinpapier. geh.
Erster Theil:
Grundvorstellungen der Geometrie.
Preis 10 Sgr.
Zweiter Theil:
Geometrische Formenlehre.
Preis 15 Sgr.

Lehrbuch der Mineralogie
unter Zugrundelegung der neueren Ansichten in der
Chemie für den Unterricht an technischen Lehranstalten,
Realschulen und Gymnasien bearbeitet von
Dr. Max Zaengerle,
Professor am Königl. Realgymnasium zu München.
Mit 209 in den Text eingedruckten Holzstichen und einer
geognostischen Tafel in Farbendruck.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 20 Sgr.

Müller, Johann Heinrich Jacob,

Die constructive Zeichnungs-Lehre oder die Lehre vom Grund- und Aufriss,
der Parallelperspective, der malerischen Perspective und der Schatten-
Construction für technische Lehranstalten und für den Selbstunterricht
Bd.: 2

Braunschweig 1874

4 Math.a. 204-2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11179172-8